ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ
ಅನುಮೋದಿಸಿದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಎರಡನೇ ವರ್ಷ

ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ



ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಕೇಂದ್ರ

ಸಲಹಾ ಸಮಿತಿ

ಅಧ್ಯಕ್ಷರು

ಡಾ. ಬಿ.ಎ.ವಿವೇಕ ರೈ

ಸದಸ್ಯರು

ಡಾ. ಕೆ.ವಿ.ನಾರಾಯಣ

ಪ್ರೊ. ಲಕ್ಷ್ಮಣ್ ತೆಲಗಾವಿ

ಡಾ. ಕರೀಗೌಡ ಬೀಚನಹಳ್ಳಿ

ಡಾ. ಹಿ.ಚಿ.ಬೋರಲಿಂಗಯ್ಯ

ನಿರ್ದೇಶಕರು

ಡಾ. ಟಿ.ಆರ್.ಚಂದ್ರಶೇಖರ

ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು

ಜೈನುಲ್ಲಾ ಬಳ್ಳಾರಿ

ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ
ಅನುಮೋದಿಸಿದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಎರಡನೇ ವರ್ಷ

ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ

ಸಂಪಾದಕ
ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್



ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ

GANITA VIJNANA – Mathematics

Prescribed Text Book for Second Year P.U.C.

Edited by

Dr. S. Balachandra Rao

Retd. Principal and Professor of Mathematics
National College, Bangalore – 560 004.
#2388, Jnana Deep, 13th Main
'A' Block, Rajajinagar II Stage
Bangalore – 560 010.

Published by

Prof. Mallepuram G. Venkatesha

Director, Prasaranga
Kannada University, Hampi
Vidyaranya – 583 276.
Pages: xx + 619 **Price: Rs. 160/-**
First Impression: 2006
www.kannadauniversity.org

ಬೆಲೆ: ರೂ. 160/-

ಪ್ರಕಾಶಕರು

ಪ್ರೊ. ಮಲ್ಲೇಪುರಂ ಜಿ. ವೆಂಕಟೇಶ

ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ
ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ - 583 276

ಮುಖಪುಟ: ಕೆ.ಕೆ.ಮಕಾಳಿ

ಅಕ್ಷರ ಸಂಯೋಜನೆ

ಗಂಗಾಧರ. ಸಿ., ಬಿ.ಎಸ್.ಕೆ. 3ನೇ ಹಂತ,
ಬೆಂಗಳೂರು – 560 028. ☎ 94485 57533

ಮುದ್ರಣ

ಸತ್ಯಶ್ರೀ ಪ್ರಿಂಟರ್ಸ್, ಚಾಮರಾಜಪೇಟೆ,
ಬೆಂಗಳೂರು – 560 018. ☎ 3250 3738

ನಿರ್ದೇಶಕರ ಮಾತು

ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಕೇಂದ್ರವು ಶಿಕ್ಷಣದ ಎಲ್ಲ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು, ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳು, ಪರಾಮರ್ಶನ ಕೃತಿಗಳು, ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಕೈಪಿಡಿಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಮತ್ತು ಪ್ರಕಟಿಸುವ ದೊಡ್ಡ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿದೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ 2004-05ರಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತಂದಿರುವ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಈ ಕಾರ್ಯ ಅನೇಕರ ಸಹಕಾರ-ಸಹಯೋಗದಿಂದ ನಡೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುತ್ತಿರುವ ಪಠ್ಯಗಳಿಗೆ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯು ಅಧಿಕೃತ ಪಠ್ಯಗಳೆಂದು ಮನ್ನಣೆ ನೀಡಿದೆ. ಇದು ತುಂಬಾ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿಯಾಗಿದೆ. ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಹಿಂದಿನ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಶ್ರೀ ಡಿ.ಎನ್.ನಾಯಕ್ ಹಾಗೂ ಇಂದಿನ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಶ್ರೀ ಗೋಪಾಳ ಭೀಮಣ್ಣ ಅವರಿಗೆ ನಾವು ತುಂಬಾ ಕೃತಜ್ಞರಾಗಿದ್ದೇವೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ರೀತಿಯ ಸಲಹೆ ಮತ್ತು ಸಹಾಯ ನೀಡುತ್ತಿರುವ ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಶ್ರೀ ಮೋಹನ್‌ಕುಮಾರ್ ಅವರಿಗೆ ವಿಶೇಷ ವಂದನೆಗಳು ಸಲ್ಲುತ್ತವೆ.

ಇದು 2005ರಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಗೊಂಡಿದ್ದರೂ ತಾಂತ್ರಿಕವಾಗಿ ಅಂತಿಮಗೊಂಡಿದ್ದು ಈಚೆಗೆ! ಈಗಿನ ಕುಲಪತಿಗಳಾದ ಡಾ ಬಿ.ಎ.ವಿವೇಕ ರೈ ಅವರು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಬೇಗ ಪ್ರಕಟಗೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಧು ಆಶಿಸಿ ನಮಗೆ ಉತ್ಸಾಹ ತುಂಬಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಕೇಂದ್ರದ ಹಿಂದಿನ ಶಕ್ತಿಯೆಂದರೆ ಆಗಿನ ಕುಲಪತಿಗಳಾಗಿದ್ದ ಡಾ. ಕೆ.ವಿ. ನಾರಾಯಣ ಅವರದ್ದು. ಅವರ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವು ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾನ್ಯ ಕುಲಪತಿಗಳಿಗೆ, ಕುಲಸಚಿವರಿಗೆ, ಕೇಂದ್ರದ ಸಲಹಾ ಮಂಡಳಿ ಸದಸ್ಯರಿಗೆ, ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಮತ್ತು ಸಿಬ್ಬಂದಿಗೆ ಕೇಂದ್ರದ ಪರವಾಗಿ ನಾನು ಕೃತಜ್ಞತೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಪ್ರಸ್ತುತ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯವನ್ನು ತುಂಬಾ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅದರ ಸಂಪಾದಕರಾದ ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್ ಅವರಿಗೆ ಹಾಗೂ ವಿವಿಧ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಾಡಿನ ಖ್ಯಾತ ಗಣಿತ ವಿದ್ವಾಂಸರಾದ ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಂತಿ ಪುರಂದರ್, ಶ್ರೀಮತಿ ಚಂದ್ರಕಲಾ, ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಕುಮಾರಿ ಮತ್ತು ಶ್ರೀಮತಿ ಸೋಮಲತಾ ಅವರಿಗೆ ನಾನು ವಂದನೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಡಾ. ಟಿ.ಆರ್.ಚಂದ್ರಶೇಖರ

ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ **ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನದ** ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನೀಡಲು ಬಹಳ ಸಂತೋಷವಾಗುತ್ತಿದೆ. 2004-05 ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಿಂದ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಜಾರಿಗೆ ಬಂದಿರುವ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೊಸ ವಿಷಯಗಳನ್ನು, ಹೊಸ ಗಣಿತ-ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಹೆಚ್ಚು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಆಡುಭಾಷೆ ಕನ್ನಡದ ಮೂಲಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬ ದೃಢ ವಿಶ್ವಾಸದಿಂದ ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು, ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನು, ಪ್ರಮೇಯ-ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಆದಷ್ಟು ಸರಳವಾದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಂದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಾಪಾಡಿಕೊಂಡು ಬರಬೇಕಾದ ಭಾಷಾಗಾಂಭೀರ್ಯಕ್ಕೆ ಹಾಗೂ ನಿಖರತೆಗೆ ಕುಂದು ತಂದಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷವಾದ ಅಂಶಗಳು

ಅ. ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವೈವಿಧ್ಯಮಯವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

ಆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಾಯದ, ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಉಪ-ಅಧ್ಯಾಯಗಳ, ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಲೆಕ್ಕಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಇ. ಅನುಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಅಧಿಕೃತ ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು, ಗಣಿತದ ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು (ಎಸೈನ್ಮೆಂಟ್) ಮತ್ತು ಯೋಜನೆ(ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್)ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳನ್ನು (ಟೆಕ್ನಿಕಲ್ ಟರ್ಮ್ಸ್) ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಭಾಗದಲ್ಲಿ **ಕನ್ನಡ-ಇಂಗ್ಲಿಷ್** ಹಾಗೂ **ಇಂಗ್ಲಿಷ್-ಕನ್ನಡ** ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಕೋಶದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಉ. ಕೆಲವು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೂಪಗಳು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣ, ಪರವಲಯ ಮತ್ತು ಪೆರಾಬೊಲಾ, ಇತ್ಯಾದಿ

ಊ. ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಿಗದಿತ ಗಣಿತ-ಚಟುವಟಿಕೆ (ಎಸೈನ್ಮೆಂಟ್) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಭಾರತೀಯ ಮತ್ತು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕಮಿತ್ರರಿಗೆ

ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಪರಾಮರ್ಶನ (ಆಕರ) ಗ್ರಂಥಗಳ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಹೊತ್ತಿಗೆಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ಲಭ್ಯವಾಗಿದ್ದು ಕಡಿಮೆ ದರದಲ್ಲೇ ಪ್ರಕಟವಾಗಿವೆ. ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಅವಕಾಶ ಒದಗಿರುವುದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಸ್ತುತ್ಯ. ಇಂತಹ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದಾಗಿ ನಮ್ಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ದೇಶದ ವಿಜ್ಞಾನ ಪರಂಪರೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಉಂಟಾಗಿರುವ ಕೀಳರಿಮೆ ಹೋಗಿ ನಿಜಕ್ಕೂ ಹೆಮ್ಮೆ ಮತ್ತು ಸ್ಫೂರ್ತಿ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ನಮ್ಮ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ವಿಶೇಷವಾದ ಆಸಕ್ತಿ ಮತ್ತು ನಿಷ್ಕಪಟ ಸಹಕಾರವೂ ಅಗತ್ಯ!

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಸಕಾಲದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಟ್ಟ ನಿಷ್ಠಾವಂತ ಸಹ-ಲೇಖಕರಾದ ಶ್ರೀಮತಿ ಚಂದ್ರಕಲಾ, ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಂತಿ ಪುರಂದರ, ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಕುಮಾರಿ ಮತ್ತು ಶ್ರೀಮತಿ ಸೋಮಲತಾ ಇವರಿಗೆ ನಾನು ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ಕನ್ನಡಭಾಷೆಯ ಹಾಗೂ ಗಣಿತವಿಜ್ಞಾನದ ಈ ಅಳಿಲು ಸೇವೆಗೆ ಅವಕಾಶ ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟ ಹಂಪಿಯ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಎಲ್ಲಾ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ನನ್ನ ಮತ್ತು ಸಹ-ಲೇಖಕರ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು ಸಲ್ಲುತ್ತವೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಂದ ಸಲಹೆ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಆಹ್ವಾನಿಸುತ್ತೇನೆ.

2388, ಜ್ಞಾನದೀಪ, 13ನೇ ಮುಖ್ಯರಸ್ತೆ
ಎ-ಬ್ಲಾಕ್, ರಾಜಾಜಿನಗರ 2ನೇ ಹಂತ
ಬೆಂಗಳೂರು-560 010.

ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್

ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ದ್ವಿತೀಯ ವರ್ಷ

ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ

ಪಠ್ಯಕ್ರಮ

ಅಧ್ಯಾಯ 1 — **10 ಘಂಟೆಗಳು**

ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೂಲಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಶೇಷೀಯತಾ ಸಂಬಂಧ

ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು, ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧ, ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನವಿಧಿ, ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (ಮ.ಸಾ.ಅ), ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಮಶೇಷೀಯಗಳು–ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಗುಣಗಳು, ರೇಖೀಯ ಸಮಶೇಷೀಯತೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 2 — **12 ಘಂಟೆಗಳು**

ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

ವಿವಿಧ ನಮೂನೆಯ ಕೋಶಗಳು, ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು–ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳು – ಲಾಘವ, ಸಹಗುಣಕ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಕೋಶ, ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ (i) ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿ (ii) ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮ. ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲಗಳು. ಕೇಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯ (ಹೇಳಿಕೆ ಮಾತ್ರ), ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 3 — **10 ಘಂಟೆಗಳು**

ಸಂಕುಲಗಳು

ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ, ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ರಚನೆಗಳು, ಅರ್ಧಸಂಕುಲ, ಸಂಕುಲ, ಪರಿವರ್ತನೀಯ (ಅಬಿಲಿಯನ್) ಸಂಕುಲಗಳ ವಿವರಣೆಗಳು. ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲಗಳು, ಸಂಕುಲದ ಅಂಶಾಂಕ, "ಗುಣಾಕಾರ" ಅಥವಾ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯ ಪಟ್ಟಿ (ಕೋಷ್ಟಕ), ಮಾಡ್ಯುಲರ್ ಸಂಕುಲಗಳು, ಕೋಶಗಳ ಸಂಕುಲ, ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳು, 3ಗಣಗಳ ಸಮಾಂಗತ ಸಂಕುಲ. $S = \{1, 2, 3\}$ ಗಣದ ಎಲ್ಲ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು, "ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ" ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

1ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು, 3ನೇ ಘಾತಮೂಲಗಳು, 4ನೆಯ ಘಾತಮೂಲಗಳು. ಇವುಗಳು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತ).

ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಗುಣಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು:

(i) ಸಂಕುಲದ ಏಕಾಂಶವು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶದ ವಿಲೋಮವು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) G ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ, $(a^{-1})^{-1} = a,\ a \in G$

(iv) ಒಂದು ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

(v) ಒಂದು ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ನಿರಸನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ.

(vi) $a * x = b$ ಮತ್ತು $x * a = b$ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದು ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉಪಸಂಕುಲಗಳು, ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾಗುವ ನಿಯಮಗಳ ನಿರೂಪಣೆ. G ಸಂಕುಲದ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ H ಉಪಗಣವು ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ,

(i) $\forall a, b \in H,\ a * b \in H$ ಮತ್ತು

(ii) H ಉಪಗಣದ ಪ್ರತಿ aಗೆ, $a^{-1} \in H$

G ಸಂಕುಲದ ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣ H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ $\forall a, b \in H,\ a * b^{-1} \in H$. ಲೆಕ್ಕಗಳು

ಅಧ್ಯಾಯ 4 | 10 ಘಂಟೆಗಳು

ಸದಿಶಗಳು

ಸದಿಶವು ಒಂದು ದಿಗ್ಯುಕ್ತ ರೇಖಾಖಂಡವೆನ್ನುವುದನ್ನು ಪುನರ್ನಿರೂಪಿಸುವುದು. ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಕ್ಕು, ಸಮದಿಶಗಳು, ಏಕಸದಿಶ, ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನಸದಿಶ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ದ್ವಿ-ಆಯಾಮ ಮತ್ತು ತ್ರಿ-ಆಯಾಮ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿನ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳಿಂದು ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾತ್ರಿವಳಿಗಳಿಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು. ಸದಿಶದ ಘಟಕಗಳು, ಸದಿಶಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ, ಅದಿಶಗುಣಾಕಾರ, ಲೆಕ್ಕಗಳು. ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನಸದಿಶ. ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರ, ಸದಿಶ ಗುಣಾಕಾರ, ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ತ್ರಿವಳಿಗುಣಾಕಾರ, ಸದಿಶ ತ್ರಿವಳಿಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳು, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ. ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ, ಸಮಾಂತರುಪರಿಪದಿಯ ಗಾತ್ರ, ಇವಕ್ಕೆ ಅವುಗಳ ಅನ್ವಯ. ಲಂಬಾತ್ಮಕ ಸದಿಶಗಳು, ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಏಕತಲಸ್ಥತೆ, ಒಂದು ಸದಿಶದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದರ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣೆ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸದಿಶಗಳ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ನಿರೂಪಿಸುವುದು:

(i) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರವಾಗಿ ದ್ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ.

(ii) ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(iv) sine ನಿಯಮ, cosine ನಿಯಮ ಮತ್ತು ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ ನಿಯಮ.

(v) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ ಮತ್ತು
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

ಅಧ್ಯಾಯ 5 — 12 ಘಂಟೆಗಳು

ವೃತ್ತಗಳು

ವಿವರಣೆ, ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು (0, 0) ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆದಾಗ ವೃತ್ತಸಮೀಕರಣ. (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ತುದಿಗಳಾದಾಗ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ, ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ, ಇವುಗಳೆರಡರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳು. $y = mx + c$ ಯು $x^2 + y^2 = r^2$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನಿಸುವ ನಿಯಮದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತ, ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ, ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಬಿಂದುವೊಂದು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಇರಲು ನಿಯಮ ನಿರೂಪಣೆ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದರ ನಿರೂಪಣೆ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಲಂಬಾತ್ಮಕ ವೃತ್ತಗಳು – ನಿಯಮ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ – ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 6 — 13 ಘಂಟೆಗಳು

ಶಂಕುಜಗಳು

ನಾಭಿ–ಚಾಲಕಗಳ ಗುಣದಿಂದ (ಶಂಕುಜದ) ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ, ಪೆರಾಬೊಲಾ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತ, ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ ಮತ್ತು ಆಯ–ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ ಇವುಗಳ ನಿರೂಪಣೆ. ಪೆರಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ, ಇತರೆ ರೂಪಗಳ

ಪೆರಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಪೀಠಿಕೆ ಮಾತ್ರ). ಪೆರಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಗುಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ. ಇತರೆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಪೀಠಿಕೆ ಮಾತ್ರ). ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಗುಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ. ಇತರೆ ರೂಪಗಳ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಪೀಠಿಕೆ ಮಾತ್ರ). ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಗುಣಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

$y^2 = 4ax$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ಈ ಶಂಕುಜಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 7 — 6 ಘಂಟೆಗಳು

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನದ ವಿವರಣೆ, ಪ್ರಾಂತ್ಯ, ಬಿಂಬಗಳು, ಪ್ರಮಾಣಕ ಸೂತ್ರಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 8 — 4 ಘಂಟೆಗಳು

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು

$\sin x = K$, $\cos x = K$, $\tan x = K$ ಮತ್ತು $a\cos x + b\sin x = c$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು, ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 9 — 8 ಘಂಟೆಗಳು

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು – ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ವಿವರಣೆ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳು. ಮಾಡ್ಯುಲಸ್, ಕೋನಾಂಕ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾನತೆ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ. ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧ್ರುವೀಯರೂಪ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲ ಅಥವಾ ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯರೂಪ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಡಿಮೊಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯ – ನಿರೂಪಣೆ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ, ಚತುರ್ಥಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ

[illegible] [illegible] ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧೀಕರಣ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 10 **14 ಘಂಟೆಗಳು**

ನಿಷ್ಪನ್ನ (ಅವಕಲನ)

ಅವಕಲನ–ಅವಕಲ್ಯತೆ, ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು. ಅವಕಲನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಅವಕಲನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದರ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳು.
ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಸ್ಥಿರ ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ–ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು. ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ x^n, e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$, $\log x$ ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು.
ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು. ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್–ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.
ಸಂಯುಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು – ಸರಪಣಿ ನಿಯಮ, ಲೆಕ್ಕಗಳು
ಆದೇಶನದಿಂದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಕಲನ. ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ, ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ, ಲಾಗರತಮೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ, ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಕಲನ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.
ಅನುಕ್ರಮ ಅವಕಲನ, ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 11 **10 ಘಂಟೆಗಳು**

ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಅನ್ವಯಗಳು

dy/dx ನ ರೇಖಾಗಣಿತರೀತ್ಯಾ ಅರ್ಥಕಲ್ಪನೆ, ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನ, ಲೆಕ್ಕಗಳು
ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.
ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ದರಮಾಪಕವಾಗಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.
ಏಕಚರದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು ಹಾಗೂ ದ್ವಿ–ಆಯಾಮದ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 12 | 8 ಘಂಟೆಗಳು

ಅನುಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲಪ್ರಮೇಯದ ಹೇಳಿಕೆ. ಅನುಕಲನವು ಅವಕಲನದ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿ, ಮುಖ್ಯಸೂತ್ರಗಳು. ಅನುಕಲದ ವಿಧಾನಗಳು: (i) ಆದೇಶದಿಂದ (ii) ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಂದ (iii) ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ. ಲೆಕ್ಕಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಾದರಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅನುಕಲನಗಳು:

$$\frac{1}{a+b\cos x},\ \frac{1}{a+b\sin x},\ \frac{1}{a\cos x+b\sin x+c},\ [f(x)]^n f'(x),\ \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}},\ \frac{1}{x\sqrt{x^2\pm a^2}},\ \frac{1}{a^2\pm x^2},\ \frac{1}{x^2-a^2}$$

$$\sqrt{a^2\pm x^2},\ \sqrt{x^2-a^2},\ \frac{px+q}{ax^2+bx+c},\ \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$\frac{p\cos x+q\sin x}{a\cos x+b\sin x},\ e^x[f(x)+f'(x)].$$

ಅಧ್ಯಾಯ 13 | 9 ಘಂಟೆಗಳು

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನ್ವಯುಗಳು

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಗುಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಅನ್ವಯ – ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಕೆಳಗಿನ (ಪ್ರದೇಶದ) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯವಿರುವ (ಪ್ರದೇಶದ) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ವೃತ್ತ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತ, ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ ಮುಂತಾದ ಮುಖ್ಯವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ 14 | 4 ಘಂಟೆಗಳು

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಮಟ್ಟ(ಘಾತ) ಮತ್ತು ದರ್ಜೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಮೊದಲನೇ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ರಚನೆ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಚರಗಳ ಬಿಂಗಡನೆಯಿಂದ ಮೊದಲನೇ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಪರಿವಿಡಿ

1. ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಶೇಷೀಯತಾ ಸಂಬಂಧ 1-23

1.1 ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು 1
1.2 ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧ [illegible]
1.2.1 ವ್ಯಾಪ್ತಿ 3
1.2.2 ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿ 4
1.3 ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ) 5
1.4 ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 9
1.5 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 9
1.5.1 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 9
1.5.2 ಸಂಯುಕ್ತ (ವಿಭಾಜ್ಯ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11
1.5.3 ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಘಾತ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ 11
1.5.4 ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 12
1.5.5 ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದರ ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತ 12
1.6 ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳು 16
1.7 ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳ ಗುಣಗಳು 16
1.8 ರೇಖೀಯ ಸಮಶೇಷೀಯತೆ 20

2. ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು 24-52

2.1 ಕೋಶಗಳು 24
2.2 ಕೋಶಗಳ ಬೈಜಿಕ ಗುಣವಿಶೇಷಗಳು 27
2.3 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು 29
2.3.1 ಲಾಘವ, ಸಹಗುಣಕ ಮತ್ತು ಸಂಗತಕೋಶ 36
2.3.2 ವ್ಯತಿರೇಕಿತ ಮತ್ತು ಅವ್ಯತಿರೇಕಿತ ಕೋಶಗಳು 37
2.3.3 ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ 38
2.4 ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ 41
2.4.1 ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿ 41
2.4.2 ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮ 43
2.5 ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲಗಳು 44
2.5.1 ಕೇಲೀ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯ 45

3 ಸಂಕುಲಗಳು 53-93

3.1.1 ಪೀಠಿಕೆ 53

3.1.2 ಯುಗಳ (ದ್ವಿಮಾನ) ಪರಿಕ್ರಿಯೆ 54

3.1.3 ಸಂಕುಲ 56

3.1.4 ಅರೆ ಸಂಕುಲ 57

3.1.5 ಮಾಡ್ಯುಲೊ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ 65

3.2 ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಕುಲ 68

3.3 ಒಂದರ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ, ಚತುರ್ಥ ಮೂಲಗಳು 72

3.4 ಸಂಕುಲದ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳು 76

3.5 ಉಪಸಂಕುಲಗಳು 80

3.6 ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು 85

4 ಸದಿಶಗಳು 94-137

4.1 ಪೀಠಿಕೆ 94

4.2 (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ 95

4.3 ವಿಭಜನ ಸೂತ್ರ 99

4.4 ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ 101

4.5 ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ 108

4.6 ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ 118

4.7 ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ 122

5. ವೃತ್ತಗಳು 138-167

5.1.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ 138

5.1.2 ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ 138

5.1.3 (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2)ಗಳು ವ್ಯಾಸವೊಂದರ ತುದಿಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ 139

5.1.4 ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ 140

5.2.1 ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ 150

5.2.2 $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2 + y^2 = a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು [illegible] 151

5.3 ಒಂದು ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ 156

5.4.1 ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತ [illegible]

5.4.2	ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ	158
5.4.3	ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷಕೇಂದ್ರ	159
5.5.1	ಲಂಬ ವೃತ್ತಗಳು	163
5.5.2	ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳಾಗಿರಲು ನಿಬಂಧನೆ	163
6	**ಶಂಕುಜಗಳು**	**168-210**
6.1	ಶಂಕುಜಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ	168
6.2.1	ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ	169
6.2.2	ಪೆರಾಬೋಲಾ $y^2 = 4ax$ ನ ಲಕ್ಷಣಗಳು	170
6.2.3	ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ	171
6.2.4	ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಇತರ ರೂಪಗಳು	172
6.2.5	ಪ್ರಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು	173
6.3.1	ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ	178
6.3.2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಕ್ಷಣಗಳು	180
6.3.3	ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಉದ್ದ	181
6.3.4	ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾದರಿ	183
6.3.5	(h, k) ಅನ್ನು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗುಳ್ಳ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ	184
6.4.1	ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ	188
6.4.2	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು	190
6.4.3	ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಉದ್ದ	191
6.4.4	ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾದರಿ	192
6.5	ಶಂಕುಜಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು	196
6.5.1	$y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ	196
6.5.2	ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು	196
6.5.3	$y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ	197
6.5.4	ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು	197

6.5.5 $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ 198
6.5.6 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು 199
6.6 ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನ ಕೊಡುಗೆ 202
6.7 ಶಂಕುಜಗಳ ಸಮಾನ ಗುಣವಿಶೇಷಗಳು 203

7. ಪ್ರತಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು 211-240
7.1 ಪ್ರತಿಲೋಮ sine ಉತ್ಪನ್ನ ($\sin^{-1}x$) 211
7.2 ಪ್ರತಿಲೋಮ cosine ಉತ್ಪನ್ನ ($\cos^{-1}x$) 212
7.3 ಪ್ರತಿಲೋಮ tangent ಉತ್ಪನ್ನ ($\tan^{-1}x$) 213
7.4 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು 230

8. ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು 241-261
8.1 ಪೀಠಿಕೆ 241
8.2 $\sin x = k,\ -1 \le k \le 1$, ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ 241
8.3 $\cos x = k,\ -1 \le k \le 1$, ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ 242
8.4 $\tan x = k,\ -\infty < k < \infty$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ 243
8.5 $a\cos x + b\sin x = c$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ 244

9. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 262-308
9.1 ಪೀಠಿಕೆ 262
9.2.1 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ 262
9.2.2 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಹವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ 263
9.2.3 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು 263
9.3 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆ – ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲ 266

9.4 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪ 267
9.5 ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ [illegible] 272
9.6 ಡಿಮೋಯ್ವರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ 279
9.7 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘಾತ ಮೂಲಗಳು 297

10. ಅವಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ **309-408**

10.1 ನಿಷ್ಪನ್ನ 309
10.2 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ 311
10.3 ಬಲ ಮತ್ತು ಎಡ ನಿಷ್ಪನ್ನ (ನಿಷ್ಪತ್ತಿ)ಗಳು 312
10.4 ನಿಷ್ಪನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಗಳ ಸಂಬಂಧ 313
10.5 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು 314
10.5.1 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ x^n ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ 314
10.5.2 ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ 316
10.5.3 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತದ ನಿಷ್ಪನ್ನ 316
10.5.4 ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ 317
10.5.5 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ 318
10.5.6 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ 319
10.5.7 e^x ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ 320
10.5.8 a^x ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ 321
10.5.9 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ $\log_e x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ 322
10.5.10 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು 323
10.5.11 ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು 334
10.5.12 ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು 335
10.6 ಸಂಯುಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು: (ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ) 341
10.7 ವಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು 347
10.8 ವಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಆದೇಶಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು 356
10.9 ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು 363
10.10 ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ 366
10.11 ಲಾಗರತಮೀಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ 373

10.12 ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ 380

10.13 ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸುವುದು. 387

10.14 ಅನುಕ್ರಮ ಅನುಕಲನ 393

11. ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಅನ್ವಯಗಳು 409-469

11.1 ರೇಖಾಗಣಿತದ ರೀತಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಕಲನಾಂಕದ ಅರ್ಥಕಲ್ಪನೆ 409

11.2 ಸ್ಪರ್ಶಕ ಹಾಗೂ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು 410

11.3 ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ 428

11.4 ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆ 437

11.5 ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕವು ಒಂದು ದರಮಾಪಕ 444

11.6 ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು 455

11.6.1 ವೃದ್ಧಿಸುವ ಮತ್ತು ಕ್ಷೀಣಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು 455

11.6.2 ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು 456

12. ಅನುಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ 470-509

12.1 ಪೀಠಿಕೆ 470

12.2 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ 470

12.3 ಅನುಕಲನದ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ 471

12.4 ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ 472

12.5 $\int dx$ ಸಂಕೇತವು ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಗಳು 474

12.6 ಆದೇಶಕ್ರಮದಿಂದ ಅನುಕಲನ 478

12.7 $\int [f(x)]^n f'(x)dx$ ಮತ್ತು $\int \frac{f'(x)dx}{[f(x)]^n}$ ರೀತಿಯ ಅನುಕಲಗಳು 482

12.8 ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಆದೇಶಗಳು 485

12.9.1 $t = \tan\frac{x}{2}$ ಆದೇಶ ಮಾಡುವ ಅವಕಲನಗಳು 495

12.9.2 $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ ಮತ್ತು $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 497

12.10 ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬೀಜವಾಕ್ಯಗಳ ಅನುಕಲನ 500

12.11 ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ 503

13. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನ್ವಯಗಳು 510-533
13.1 ಅನುಕಲನ-ಒಂದು ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿಯಾಗಿ 510
13.2 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ 511
13.3 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಗಳು 518
13.4 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲದ ಅನ್ವಯ 526

14. ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು 534-549
14.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು 534
14.2 ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರಚನೆ 535
14.3 ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ 541
14.4 ಚರಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದಾದ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು 546

ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಉತ್ತರಗಳು 550

ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಯೋಜನೆಗಳು 590

ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯ ನೀಲಿನಕ್ಷೆ 593

ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆ 594

2006 ಮಾರ್ಚ್-ಏಪ್ರಿಲ್ ಮತ್ತು ಜುಲೈ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಗಳು 599

ಕನ್ನಡ-ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲಿಷ್-ಕನ್ನಡ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಕೋಶ 610

ಪರಾಮರ್ಶನ ಗ್ರಂಥಗಳು 616

ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳು 616

ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳು 618

ಸಂಪಾದಕರ ಮತ್ತು ಲೇಖಕರ ವಿಳಾಸ 619

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಶೇಷೀಯತಾ ಸಂಬಂಧ

1.1 ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಾದ ಮುಖ್ಯ ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣ ವಿಶೇಷಗಳ ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು Z ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ, ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು, ಅಂದರೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು, N ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ ನಮೂದಿಸುತ್ತೇವೆ.

Zನಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದಾದ '$\leq$' ಕ್ರಮಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕುರಿತು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ ಆ ವಿಷಯದ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ನಾವು ಸವಿವರವಾಗಿ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲವಾದರೂ, ಪೂರ್ಣತೆಗೋಸ್ಕರವಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತಾವಿಸುತ್ತ ಅದರ ಗುಣ ವಿಶೇಷಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:

$a.b \in Z$ ಮತ್ತು $a < b \Leftrightarrow b - a \in N$. ಅಂದರೆ $b - a \in N$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಾದರೆ $a < b$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$a < b$ ಅಥವಾ $a = b$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸತ್ಯವಾದರೆ $a \leq b$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $4 \leq 4$ $(\because 4 = 4)$

$4 \leq 5$ $(\because 5 - 4 = 1 \in N$ ಆದ್ದರಿಂದ $4 < 5)$

Z ನಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಈ ಸಂಬಂಧ $\leq$ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿದೆ:

1. Zನ ಎಲ್ಲ ಧಾತುಗಳಿಗೆ $a \leq a$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ($\leq$ **ಸ್ವತುಲ್ಯ** ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ).
2. $a,b \in Z$, $a \leq b$ ಮತ್ತು $b \leq a$ ಆದರೆ $a = b$ ಆಗುತ್ತದೆ. ($\leq$ **ಸಮಮಿತ** ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ)
3. $a,b,c \in Z$, $a \leq b$ ಮತ್ತು $b \leq c$ ಆದರೆ $a \leq c$ ಆಗುತ್ತದೆ. ($\leq$ **ಪ್ರವಹನಶೀಲ** ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ).

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಂದರೆ ಸ್ವತುಲ್ಯ, ಪ್ರತಿಸಮಮಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರವಹನ ಶೀಲವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು "**ಆಂಶಿಕ ಕ್ರಮ**" ಸಂಬಂಧವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ನಾವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ '$\leq$' ಸಂಬಂಧವು ಈ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾಗಿದೆ.

4. $a,b \in Z$, ಆದಾಗ $a \leq b$ ಅಥವಾ $b \leq a$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ Z ನಲ್ಲಿ $\leq$ ಕ್ರಮಸಂಬಂಧ (ಪೂರ್ಣಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ). ಯಾವುದೇ ಗಣದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಗಣವನ್ನು "**ಕ್ರಮಸಂಬಂಧಯುಕ್ತ**" ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$(Z, \leq)$ ಒಂದು ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧಯುಕ್ತ ಗಣವಾಗಿದೆ.

Z ನಲ್ಲಿ + ಮತ್ತು . ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ಪ್ರಚಲಿತವಿವೆ.

($\leq$ ಎಂಬ ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವು ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳೊಂದಿಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.)

5. $(c \in Z)$ ಮತ್ತು $a \leq b$ ಆದರೆ $a + c \leq b + c$

6. c ಯು ಋಣವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು $a \leq b$ ಆದರೆ $ac \leq bc$.

1.2 ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧ

1.2.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

$a, b \in Z$ ಮತ್ತು $a \neq b$ ಆಗಿರಲಿ. $b = ka$ ಆಗುವಂತೆ Z ನಲ್ಲಿ k ಎಂಬ ಧಾತುವೊಂದಿದ್ದರೆ aಯು bಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. $a|b$ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗಾದಾಗ aಯು bಯ ಅಪವರ್ತನವೆಂದೂ ಅಥವಾ bಯು aನ ಅಪವರ್ತ್ಯವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $a|b \Leftrightarrow b = ka$ ಆಗುವಂತೆ $k \in Z$ ಧಾತುವೊಂದಿದೆ.

ಉದಾ: 1. $6 = 2.3 = 3.2$ ಆದ್ದರಿಂದ $3|6$ ಮತ್ತು $2|6$

2. $a = 1 \cdot a = a \cdot 1$ ಆದ್ದರಿಂದ $1|a$ ಮತ್ತು $a|1$; ಇದು Z ನ ಎಲ್ಲ ಗಣಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

3. $a|b$ ಆದರೆ $-a|b$ ಮತ್ತು $a|-b$ ಆದ್ದರಿಂದ Z ನ ಯಾವುದೇ ಧಾತು aಗೆ ಕನಿಷ್ಠ 4 ಅಪವರ್ತನಗಳು $\pm 1, \pm a$ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ: (i) 6ರ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3 \ \pm 6\}$ ಇದು 6 ರ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ.

(ii) 5ರ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$\{\pm 1, \pm 5\}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೂಲಂಕುಷವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧದ ಬಗ್ಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳು ನಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ:

(a) $a|a$ ಮತ್ತು $-a|a$

(b) $a|a$ ಅಂದರೆ ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧವು Z ನಲ್ಲಿ ಸ್ವತುಲ್ಯವಾಗಿದೆ

(c) $a|b$ ಮತ್ತು $b|a$ ಆದರೆ $a = \pm b$

(d) $a|b$ ಮತ್ತು $b|c$ ಆದರೆ $b = k_1 a$, $c = k_2 b$ $(k_1, k_2 \in Z)$ ಆಗುವಂತೆ ಇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $c = k_2(k_1 a) = (k_1 k_2)a \Rightarrow a|c$

ಅಂದರೆ, ಭ್ಯಾಜ್ಯತಾ ಪ್ರವಹನಶೀಲವಾಗಿದೆ.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ Nಗೆ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಸ್ವತುಲ್ಯವೂ, ಪ್ರತಿ ಸಮಮಿತವೂ ಮತ್ತು

ಸಂಕ್ರಮಣೀಯವೂ ಆಗುವುದರಿಂದ ಅದು ಆಂಶಿಕ ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಭಾಜ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧವು ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ 2, $3 \in N$ ಆದರೆ $2 \nmid 3$ ಮತ್ತು $3 \nmid 2$.

1.2.2 ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿ

ಈಗ $a,\ b \in Z$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $a \neq 0$. ಈ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ $S = \{b - aq \mid q \in Z\}$ ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವೆವು. ಇದು Zನ ಉಪಗಣ ಮತ್ತು $b \in S$ ಆದ್ದರಿಂದ $S \neq \phi$. ಈಗ r ಎಂಬುದು Sನಲ್ಲಿರುವ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. [ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಅತಿಚಿಕ್ಕ ಧಾತುವೊಂದಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸಕ್ರಮೀಕರಣ ಗುಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧ ಯುಕ್ತ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಗುಣವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಕ್ರಮಯುಕ್ತ ಗಣವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಈ ಗುಣವಿದೆ]. ಇಲ್ಲಿ r ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರು ವುದರಿಂದ $0 < r$, ಈ $r \leq a$ ಕೂಡಾ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $r > a$ ಆದರೆ $r - a$ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು rಗಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $r - a \in S$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಕಾರಣ rಎಂಬುದು Sನಲ್ಲಿರುವ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕದೆಂಬ ನಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಗೆ ವಿರೋಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Sನಲ್ಲಿರುವ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ $r \leq a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $r = b - aq$, $0 < r \leq a$ ಅಥವಾ $b = aq + r$, $0 < r \leq a$.

ಒಂದುವೇಳೆ $r = a$ ಆದರೆ $b = a(q + 1) + 0$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ a, b ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ aಯು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ $b = aq + r$ ಮತ್ತು $0 \leq r < a$ ಆಗುವಂತೆ r ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ. a ಮತ್ತು bಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವುಗಳು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು "**ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿ**" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ qಅನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವೆಂದೂ, rಅನ್ನು ಭಾಜ್ಯಶೇಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಶೇಷವು 0 ಆದಾಗ $a|b$ ಆಗುತ್ತದೆ.

"ಯುಕ್ಲೀಡಿಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿ" ಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

"$a, b \in Z$, $a > 0$ ಆದರೆ $a|b$ ಅಥವಾ $b = aq + r$, $0 < r < a$ ಆಗುವಂತೆ Z ನಲ್ಲಿ q ಮತ್ತು r ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು a ಮತ್ತು bಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಈ q ಮತ್ತು rಗಳು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ".

ಈ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.3 ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (ಮ. ಸಾ. ಅ.)

a ಮತ್ತು b ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. a ಮತ್ತು b ಗಳ ಎಲ್ಲ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಆಗ $A \cap B$ಯ ಯಾವುದೇ ಧಾತು dಯು, $d|a$ ಮತ್ತು $d|b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, dಯು a ಮತ್ತು bಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಪೈಕಿ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಧನಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನವೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು "ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ" ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. a ಮತ್ತು bಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು (a, b) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. dಯು a ಮತ್ತು bಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ cಯು dಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಬದ್ಧವಾದ d ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಗವಾಗಿದೆ:

1. d ಯು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $d|a$ ಮತ್ತು $d|b$
2. ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ d_1 ಆಗಿದ್ದರೆ $d_1|b$.

ಉದಾಹರಣೆ: 56 ಮತ್ತು 48ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

56ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ

$=\{\pm 56, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 8, \pm 14, \pm 28\}$

48ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ

$=\{\pm 48, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24\}$

∴ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ = {±1, ±2, ±4, ±8}

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ = 8

ಎರಡು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

a ಮತ್ತು bಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಯು ಯಾವುದೇ ನಷ್ಟವಿಲ್ಲದೆ $a|b$ ಆದರೆ aಯು ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $a \nmid b$ (a ಸಂಖ್ಯೆಯು bಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ) ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಯುಕ್ಲಿಡೀಯ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. b, a, r_1, r_2, r_3 ಇತ್ಯಾದಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಈಗ

$$l = aq_1 + r$$
$$a = r_1q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

- - - - - - - - - -

- - - - - - - - - -

- - - - - - - - - -

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹುಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $b > a > r_1 > r_2 > r_3$ ………… ಈ ಶ್ರೇಣಿಯು ಅನಂತವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಕಾರಣ $r_n = 0$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆಗ $r_{n-2} = q_n r_{n-1}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಕ್ಕೆ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾಗಿ ಶ್ರೇಣಿಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ಕೊನೆಯ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಶೇಷ r_{n-1} ಅನ್ನು d ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಈ d ಯು r_{n-2} ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ r_{n-1}, r_{n-2}ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆದೇಶಿಸುತ್ತ ಬಂದರೆ $d|r_{n-3}$, $d|r_{n-4}$ ……… $d|r_2$, $d|r_1$, $d|a$, $d|b$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ dಯು ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ಅಂಶವೆಂದರೆ

$$r_1 = b - aq_1 = a(-q_1) + b$$
$$r_2 = a - r_1q_2 = a - (b - aq_1)q_2$$
$$r_3 = r_1 - r_2q_3 = (b - aq_1) - q_3[(a_1 + q_1q_2) - bq_2]$$
$$= a[-q_1 - q_3(1 + q_1q_2)] + b(1 + q_2q_3)$$

ಹೀಗೆ ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ $Sa + Lb$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಇಲ್ಲಿ $S, L \in Z$.

ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಕೊನೆಯ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಶೇಷ $r_{n-1} = d$ ಯನ್ನು ಕೂಡ $Sa + Lb$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈಗಾಗಲೇ dಯು a ಮತ್ತು bಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ d^1 ಇನ್ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $a = k_1d^1$ ಮತ್ತು $b = k_2d^1$ ಆಗುತ್ತವೆ ($k_1, k_2 \in Z$).

ಆದ್ದರಿಂದ $d = S(k_1d^1) + L(k_2d^1) = (Sk_1 + Lk_2)d^1$

ಅಂದರೆ, $d^1|d$ ಮತ್ತು dಯು ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ dಯು ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ 56 ಮತ್ತು 48ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$56 = 1(48) + 8$

ಮತ್ತು $48 = 6(8) + 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 8.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ 456 ಮತ್ತು 362ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

```
362) 456 (1
     362
      94) 362 (3
          282
           80) 94 (1
               80
```

14) 80 (5
70
10) 14 (1
10
4) 10 (2
8
2) 4 (2
4
0

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 94, 80, 14, 10, 4, 2, 0. ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಕೊನೆಯ ಶೇಷ 2. ಇದೇ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: 325 ಮತ್ತು 456ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

325) 456 (1
325
131) 325 (2
262
63) 131 (2
126
5) 63 (12
60
3) 5 (1
3
2) 3 (1
2
1) 2 (2
2
0

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 131, 63, 5, 3, 2, 1, 0.
ಕೊನೆಯ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಶೇಷ 1. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 1.

ಉದಾಹರಣೆ 4: 315 ಮತ್ತು 57 ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದನ್ನು $Sa + Lb$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

```
57) 315 (5
    285
     30) 57 (1
         30
         27) 30 (1
             27
              3) 27 (9
                 27
                  0
```

$\therefore (57, 315) = 3$. ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ,

$$315 = 5 \times 57 + 30$$
$$57 = 1 \times 30 + 27$$
$$30 = 1 \times 27 + 3$$

ಆದ್ದರಿಂದ $3 = 30 - 1 \times 27$

$$= 30 - 1(57 - 30 \times 1)$$
$$= -57 + (2)30$$
$$= -57 + 2(315 - 5 \times 57)$$
$$\mathbf{= (-11)57 + (2)315.}$$

1.4 ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಎರಡು ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು bಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ $(a, b)=1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ **ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ** ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1ಅನ್ನು ಅಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (i) $(4, 9) = 1$ (ii) $(64, 45) = 1$ (iii) $(32, 45) = 1$.

1.5 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1.5.1 (i) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ aಗೆ ± 1, $\pm a$ ಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲದೆ aಗೆ ಬೇರೆ ಯಾವ ಅಪವರ್ತನಗಳೂ ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ P ಗೆ ಕೇವಲ ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1 ಮತ್ತು P ಮಾತ್ರ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: (1) 2, 3, 5, 11 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(2) 6 ಅವಿಭಾಜ್ಯವಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ 1, 6 ಅಲ್ಲದೆ 2 ಮತ್ತು 3 ಧನಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ.

(ii) ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅವಿಭಾಜ್ಯವಲ್ಲದ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, c ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು 1 ಮತ್ತು c ಅಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಒಂದಾದರೂ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 4, 9, 10, 15

ಪ್ರಮೇಯ 1: ಈಗ aಯು ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. Pಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $P|a$ ಅಥವಾ $(P, a) = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: $P|a$ ಆದರೆ ಸಾಧಿಸಲು ಏನೂ ಉಳಿಯುವುದಿಲ್ಲ. $P|a$ ಆದರೆ $(P, a) = d$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈ dಯು P ಮತ್ತು aಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ. dಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು Pಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $d = 1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು: ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 1 ಆದರೆ ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅಭಾಜ್ಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2: $c|ab$ ಮತ್ತು $(c, a) = 1$ ಆದರೆ $c|b$. ಅಂದರೆ, cಯು ab ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು c ಮತ್ತು aಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ cಯು bಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: $c|ab$ ಮತ್ತು $(c, a) = 1$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $xc + ya = 1$ ಆಗುವಂತೆ Zನಲ್ಲಿ x, y ಎಂಬ ಘಾತುಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $b(xc + ya) = b$

$\Rightarrow bxc + bya = b$

$c|ab \Rightarrow ab = kc$ ಆಗುವಂತೆ Zನಲ್ಲಿ k ಎಂಬ ಘಾತುವಿದೆ.

ಹಾಗಾಗಿ, $b = (bx)c + (ky)c$

i.e., $b = (bx + ky)\, c \Rightarrow c|b$

ಉಪಪ್ರಮೇಯ: $P|ab$ ಮತ್ತು P ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $P|a$ ಅಥವಾ $P|b$.

ಸಾಧನೆ: P ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $P|a$ ಆದರೆ $(P, a) = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ $P|b$.

1.5.2 ಸಂಯುಕ್ತ (ವಿಭಾಜ್ಯ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಯಾವುದೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಅಥವಾ ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 6, 9, 10, 15 ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. cಯು ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $c = ab$, $a< c$, $b < c$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಬರುವ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಆ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೊಡಲಪೇಕ್ಷಿಸುವುದಿಲ್ಲವಾದರೂ ಅದರ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಗಮನದಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

1.5.3 ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಘಾತ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ

ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ aಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಆ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

ಈಗ a ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು, $P_1, P_2 \ldots\ldots\ldots P_k$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅವುಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ $a_1, a_2 \ldots\ldots a_k$ ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತನ ಹೊಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ aಯು ಮಾದರಿ ಸಂವಿಭಜನೆಯ ರೂಪ :

$$a = P_1^{a_1} \cdot P_2^{a_2} \cdot P_3^{a_3} \ldots\ldots\ldots P_k^{a_k}$$

ಇಲ್ಲಿ $P_1 < P_2 < P_3 .... < P_k$

ಉದಾಹರಣೆ: (i) $1872 = 2^4 . 3^2 . 13^1$

(ii) $30400 = 4^3 . 5^2 . 19^1$

1.5.4 ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

a ಎಂಬುದು ಒಂದು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $T(a)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಅಂದರೆ $a = P_1^{a_1} \cdot P_2^{a_2} \cdot P_3^{a_3} ....P_n^{a_n}$

ಎಂಬುದು aಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಮಾದರಿ ಸಂವಿಭಜನೆಯಾಗಿರಲಿ ಆಗ aಯ ಯಾವುದೇ ಭಾಜಕ ಸಂಖ್ಯೆ dಯು

$d = P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdot P_3^{m_3} ....P_n^{m_n}$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $i = 1, 2, ...n$ ಗೂ $0 \leq m_i \leq a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ m_iಗೂ $(a_i + 1)$ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾದ್ದರಿಂದ, aಸಂಖ್ಯೆಯ (dಯಂತಹ) ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು(m_1, m_2, ... m_n) ಗಣದ ವಿಭಿನ್ನ ಆಯ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಆಯ್ಕೆಗಳು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಗೆ ಒಳಗಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂತಹ ಆಯ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$(1 + a_1)(1 + a_2) (1 + a_3) .... (1 + a_n)$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$T(a) = (1 + a_1) (1 + a_2) .... (1 + a_n).$$

ಉದಾಹರಣೆ: $768 = 2^8 . 3^1$

$$\therefore \quad T(768) = (1 + 8) (1 + 1) = 18$$

1.5.5 ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದರ ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತ

ಒಂದು ದತ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ aಯ ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು $S(a)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

aಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಮಾದರಿ ಸಂವಿಭಜನೆಯು

$$a = P_1^{a_1} \cdot P_2^{a_2} \cdots\cdots P_n^{a_n}$$

ಆಗಿರಲಿ, ಆಗ

$$S(a) = \left[\frac{P_1^{a_1+1}-1}{P_1-1}\right]\left[\frac{P_2^{a_2+1}-1}{P_2-1}\right]\cdots\cdots\left[\frac{P_n^{a_n+1}-1}{P_n-1}\right]$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. (ಇಲ್ಲಿ ಆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿಲ್ಲ).

ಉದಾಹರಣೆ: $960 = 2^6 . 3^1 . 5^1$

$$\therefore \ S(960) = \left(\frac{2^7-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^2-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right) = 3048$$

ಪ್ರಮೇಯ 1: ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಭಾಜಕವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ a ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಭಾಜಕವು k ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, $1 < k < a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ k ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ k ಸಂಖ್ಯೆಯು 1 ಮತ್ತು k ಅಲ್ಲದೆ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಜಕವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅದು x ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $1 < x < k$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $x|k$ ಮತ್ತು $k|a \quad \therefore \quad x|a$

ಅಂದರೆ kಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ x ಸಂಖ್ಯೆಯು aಯ ಭಾಜಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, kಯು aಸಂಖ್ಯೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಭಾಜಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಮೊದಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಇದು ವಿರೋಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, k ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2: ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತ.

ಸಾಧನೆ: ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ, P ಎಂಬುದು ಗರಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ Pಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇಲ್ಲ . ಈಗ

$$N = 1 + (2.\ 3.\ 5.\ 7 \ldots\ldots\ldots P)$$

ಅಂದರೆ Pಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ 1 ಹೆಚ್ಚು. ಈಗ, N ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2, 3, 5, ... Pಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೂ ಶೇಷ 1 ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 2, 3, 5, ... Pಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ N ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಜಕವಲ್ಲ. ಈಗ N ಎಂಬುದು

(*i*) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ

(*ii*) ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

(*i*) N ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $N > P$. ಅಂದರೆ ಗರಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ Pಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ N ಇದೆ.

(*ii*) N ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ 2, 3, 5, ... P ಗಳಿಗಿಂತ ಬೇರೆಯಾದ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ q ಎಂಬುದು N ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಜಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ $q > P$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಗರಿಷ್ಠವೆಂದು ಊಹಿಸಲಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ Pಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಹೀಗೆ, ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ Pಯು ಗರಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ವಿರೋಧ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತ.

ಪ್ರಮೇಯ 3: $ax + by = 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ x ಮತ್ತು y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(a, b) = 1$.

ಅಂದರೆ a, b, x, y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $ax + by = 1$ ಸಮೀಕರಣವು ಸರಿ ಹೊಂದುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ a ಮತ್ತು b ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ, $(a, b) = d \neq 1$ ಆಗಿರಲಿ, ಈಗ $d|a$ ಮತ್ತು $d|b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ.

$$d|ax \text{ ಮತ್ತು } d|by$$

$\therefore \quad d|(ax+by)$

ಆದರೆ $\quad ax+by=1 \quad \therefore \; d\,|1$

ಆದರೆ $d > 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $d|1$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉಂಟಾಗಿರುವ ವಿರೋಧದಿಂದಾಗಿ $(a, b) = 1$.

ಪ್ರಮೇಯ 4: $(a, b) = 1$ ಮತ್ತು $(a, c) = 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $(a, bc) = 1$

ಸಾಧನೆ: $(a, b) = 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$1 = ax + by \qquad \dots (1)$$

ಸಮೀಕರಣ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ x ಮತ್ತು y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

ಅಂತೆಯೇ $(a, c) = 1 \Rightarrow 1 = am + cn \qquad \dots (2)$

ಆಗುವಂತೆ m, n ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

$\therefore \quad (ax+by)(am+cn) = 1$

ಅಂದರೆ $\quad a^2mx + ax \cdot cn + abym + bcny = 1$

ಅಥವಾ $\quad (amx + cnx + bmy)a + (ny)bc = 1$

ಅಥವಾ $\quad p(a) + q(bc) = 1$

ಇಲ್ಲಿ $p = amx + cnx + bmy$ ಮತ್ತು $q = ny \qquad \dots(3)$

ಫಲಿತಾಂಶ (3) ಕ್ಕೆ ಪ್ರಮೇಯ (3) ಅನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ $(a, bc) = 1$ ಅಂದರೆ a ಮತ್ತು bc ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸದಂತಾಯಿತು.

ಪ್ರಮೇಯ 5: ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ aಯ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಭಾಜಕವು $\sqrt{a}$ ಅನ್ನು ಮೀರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ: a ಎಂಬ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕವು P ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad a = kP \qquad (1 < P \leq k)$$

ಈಗ, $P \leq k$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಮೇಲಿನ ಅಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನು $P>0$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$P^2 \leq kP$$

ಅಥವಾ $P^2 \leq a \qquad (\because a = kP)$

$$\Rightarrow P \leq \sqrt{a}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ Pಯು $\sqrt{a}$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೀರುವುದಿಲ್ಲ.

1.6 ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: a ಮತ್ತು b ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. m ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $a-b$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು m ಸಂಖ್ಯೆಯು ನಿಃಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ $(m \mid a-b)$, a ಮತ್ತು b ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (mಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ) **ಸಮಶೇಷೀಯ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

(ಓದುವ ಕ್ರಮ: "a ಕಾಂಗ್ರುಯೆಂಟ್ b ಮಾಡ್ಯುಲೊ m") ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$a \equiv b \pmod{m}$ ಮತ್ತು $(m \mid a-b)$

ಎಂಬ ಎರಡು ಹೇಳಿಕೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

$a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ $(m \mid a-b)$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$a - b = km$ ಅಥವಾ $a = b + km$

(ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$a \not\equiv b \pmod{m}$ ಅಂದರೆ $m \nmid a-b$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(i) $16 \equiv 4 \pmod{3} \quad \because 3 \mid 16-4$

(ii) $21 \equiv -4 \pmod{5} \quad \because 5 \mid 21-(-4)$

(iii) $15 \not\equiv 3 \pmod{7} \quad \because 7 \nmid 15-3$

1.7 ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳ ಗುಣಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ 1: ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ: ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ Z ಮೇಲೆ "$\equiv(\text{mod } m)$" ಎಂಬ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ m ಎಂಬುದು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಸ್ಥಿರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಒಂದು "ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ಆ ಸಂಬಂಧವು (i) ಆತ್ಮವರ್ತಕ (ರಿಫ್ಲೇಕ್ಸೀವ್) (ii) ಸಮಮಿತೀಯ (ಸಿಮೆಟ್ರಿಕ್) ಮತ್ತು (iii) ಪ್ರವಹನೀಯ (ಟ್ರಾನ್ಸಿಟಿವ್) ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

(i) **ಆತ್ಮವರ್ತಕ:** $a \in Z$ ಆಗಿರಲಿ.

$m|0$ ಅಥವಾ $m|a-a$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad a \equiv a \,(\text{mod } m)$

ಅಂದರೆ "$\equiv(\text{mod } m)$" ಎಂಬುದು ಆತ್ಮವರ್ತಕ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

(ii) **ಸಮಮಿತೀಯ:** $a, b \in Z$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $\quad a \equiv b \,(\text{mod } m) \Rightarrow m|a-b$

$\therefore \quad m|-(a-b) \Rightarrow m|b-a$

ಅಂದರೆ $\quad b \equiv a \,(\text{mod } m)$

ಆದ್ದರಿಂದ "$\equiv(\text{mod } m)$" ಎಂಬುದು ಸಮಮಿತೀಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

(iii) **ಪ್ರವಹನೀಯ:** $a, b, c \in Z$ ಆಗಿರಲಿ.

$a \equiv b \,(\text{mod } m)$ ಮತ್ತು $b \equiv c \,(\text{mod } m)$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \; m|a-b$ ಮತ್ತು $m|b-c$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $m \mid (a-b)+(b-c) \Rightarrow m \mid a-c$

ಅಂದರೆ $a \equiv c(\text{mod } m)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ "$\equiv(\text{mod } m)$" ಎಂಬುದು ಪ್ರವಹನೀಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ. ಈಗ (i), (ii), ಮತ್ತು (iii) ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಂದ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಒಂದು **ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ** ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಪ್ರಮೇಯ 2: $a \equiv b \,(\text{mod } m)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$a \pm x = b \pm x \,(\text{mod } m)$ ಮತ್ತು

$ax \equiv bx \,(\text{mod } m)$

ಸಾಧನೆ: (i) ಈಗ $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದೆ

ಅಂದರೆ $m | a - b \Rightarrow m | (a + x) - (b + x)$

ಅಥವಾ $a - x \equiv b - x \pmod{m}$

ಅದೇ ರೀತಿ $m | a - b \Rightarrow m | (a - x) - (b - x)$

ಅಥವಾ $a - x \equiv b - x \pmod{m}$

(ii) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b$

$\therefore \quad m | (a - b)x \qquad \forall x \in Z$

ಅಥವಾ $m | ax - bx$

ಅಂದರೆ $ax \equiv bx \pmod{m}$

ಪ್ರಮೇಯ 3: (ನಿರಸನ ನಿಯಮ)

c ಮತ್ತು m ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅಪಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $ca \equiv cb \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $a \equiv b \pmod{m}$.

ಸಾಧನೆ: c ಮತ್ತು m ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅಪಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ $(c, m) = 1 \quad \therefore \; m \nmid c$ ... (1)

ಈಗ $ca \equiv cb \pmod{m} \Rightarrow m | ca - cb$ ಆಗಿರಲಿ

ಅಥವಾ $m | c(a - b)$.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $m \nmid c$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \; m | (a - b) \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

ಪ್ರಮೇಯ 4: $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದು, n ಎಂಬುದು mನ ಒಂದು ಧನ ಭಾಜಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $a \equiv b \pmod{n}$.

ಸಾಧನೆ: $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $m | a - b$

ಆದರೆ $n | m$ ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರವಹನ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ $n | a - b$

ಅಥವಾ $a \equiv b \pmod{n}$

ಪ್ರಮೇಯ 5: $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ a ಮತ್ತು b ಗಳು mನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಮಾನವಾದ ಶೇಷವನ್ನು ಬಿಡುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: (i) ಮೊದಲಿಗೆ $a \equiv b(\text{mod } m)$ ಆಗಿದ್ದರೆ a ಮತ್ತು bಗಳನ್ನು m ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಶೇಷವು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

$$a \equiv b(\text{mod } m) \quad \Rightarrow \quad m|a-b$$

ಅಂದರೆ $a - b = km \qquad (k \in Z)$

ಅಥವಾ $a = b + km$

ಈಗ bಅನ್ನು mನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ q ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $r(> 0)$ ಶೇಷವಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ. ಆಗ

$$b = mq + r$$

ಆದ್ದರಿಂದ $a = b + mk = mq + r + mk$

ಅಥವಾ $a = m(q + k) + r$

ಅಥವಾ $a = m(x) + r \qquad (x = q + k)$

ಅಂದರೆ aಅನ್ನು bನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು r ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ mನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಶೇಷವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.

(ii) ಈಗ a ಮತ್ತು b ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು mನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಶೇಷವು ಉಳಿದರೆ ಆಗ $a \equiv b(\text{mod } m)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

a ಮತ್ತು bಗಳನ್ನು mನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಅವೆರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು r ಎಂಬ ಶೇಷವನ್ನು ಉಳಿಸಲಿ. ಅಂದರೆ, $a = mq_1 + r$ ಮತ್ತು $b = mq_2 + r$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇಲ್ಲಿ q_1 ಮತ್ತು q_2ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳು ಮತ್ತು $0 \leq r < m$

$$\therefore \quad a - b = mk$$

ಇಲ್ಲಿ $k = q_1 + q_2$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $m|a-b$ ಅಥವಾ $a \equiv b\ (\text{mod } m)$.

ಪ್ರಮೇಯ 6: $a \equiv b\ (\text{mod } m)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(a, m) = (b, m) = 1$ ಅಂದರೆ a, m ಹಾಗೂ b, m ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: b ಮತ್ತು m ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. d ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ $(b, m) = d$ ಆಗ $d|b$ ಮತ್ತು $d|m$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m|a-b$$

ಈಗ $d|m$ ಮತ್ತು $m|a-b \Rightarrow d|a-b$

ಹಾಗೆಯೇ, $d|b$ ಮತ್ತು $d|a-b \Rightarrow d|b+a-b$ ಅಥವಾ $d|a$

ಈಗ $d|a$ ಮತ್ತು $d|m$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $d|am$

ಆದರೆ $(a, m) = 1$ $\quad \therefore \quad d|1$ ಅಂದರೆ $d = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ $(b, m) = 1$.

1.8 ರೇಖೀಯ ಸಮಶೇಷೀಯತೆ

$ax \equiv b \pmod{m}$ ಎಂಬುದನ್ನು "xನಲ್ಲಿ ರೇಖೀಯ ಸಮಶೇಷೀಯತೆ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತವಾದ xನ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಸರಿಹೊಂದಿದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಆ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಒಂದು **ಮೂಲ** ಅಥವಾ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 (i) $3x \equiv 1 \pmod{7}$ ಎಂಬ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಒಂದು ಮೂಲ 5.

ಅಂತೆಯೇ $-2, 12, 19$ ಮುಂತಾದವುಗಳು ಕೂಡ ಮೂಲಗಳು.

(ii) $3x \equiv 1 \pmod{5}$ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಒಂದು ಮೂಲ 2.

(iii) $2x \equiv 4 \pmod{6}$ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಮೂಲ 2 ಮತ್ತು 5 ಆಗಿವೆ.

2. ಇವುಗಳು ನಿಜವೆ?

(i) $100 \equiv 2 \pmod{4}$ (ii) $73 \equiv -7 \pmod{5}$

(iii) $36 \equiv 12 \pmod{5}$ (iv) $17 \equiv 3 \pmod{7}$

(i) $100 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 4|100-2$

ಆದರೆ, $4 \nmid 98$ ಆದ್ದರಿಂದ $100 \equiv 2 \pmod{4}$ ನಿಜವಲ್ಲ.

ಅಂದರೆ $100 \not\equiv 2 \pmod{4}$

(ii) $73 \equiv -7 \pmod{5} \Rightarrow 5|73-(-7)$

ಅಂದರೆ, $5|80$ ಆದ್ದರಿಂದ $73 \equiv -7 \pmod 5$ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(iii) $36 \equiv 12 \pmod 5 \Rightarrow 5|36-12$ i.e., $5|24$

ಆದರೆ, $5 \nmid 24$ ಆದ್ದರಿಂದ $36 \not\equiv 12 \pmod 5$

(vi) $17 \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow 7|17-3$

ಆದರೆ, $7|14$ ಆದ್ದರಿಂದ $17 \equiv 3 \pmod 7$.

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ

(i) $x - 7 \equiv x + 8 \pmod 5$

(ii) $2x - 5 \equiv 3 - x \pmod 4$

(i) $x - 7 \equiv x + 8 \pmod 5 \Rightarrow 5|(x-7)-(x+8)$

ಅಥವಾ $5|-15 \Rightarrow -15 \equiv 0 \pmod 5$

ಅಥವಾ $15 \equiv 0 \pmod 5$.

(ii) $2x - 5 \equiv 3 - x \pmod 4 \Rightarrow 4|2x-5-3+x$

ಅಂದರೆ $4|3x-8$ ಅಥವಾ $3x \equiv 8 \pmod 4$

4. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳ ಒಂದು ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) $2x - 1 \equiv x + 5 \pmod 6$

(ii) $3x \equiv 5 \pmod 6$

(iii) $4x \equiv 4 \pmod 3$

(i) $2x - 1 \equiv x + 5 \pmod 6 \Rightarrow 6|(2x-1)-(x+5)$

$\therefore 6|x-6$

$x = 0$ ಆದಾಗ $6|-6$ ಆದ್ದರಿಂದ $x = 0$ ಒಂದು ಮೂಲ

(ii) $3x \equiv 5 \pmod 6 \Rightarrow 6|3x-5$

xನ ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗೂ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸರಿಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

(iii) $4x \equiv 4 \pmod 3 \Rightarrow 3|4x-4 \quad \therefore 4x - 4 = 3k$

ಅಥವಾ $x=\frac{3k+4}{4}$

ಈಗ $k=0$ ಆದಾಗ $x=1$ ಮತ್ತು $k=4$ ಆದಾಗ $x=4$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಅನೇಕ ಮೂಲಗಳ ಪೈಕಿ $x=1$, $x=4$ ಎಂಬುದು ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿವೆ.

5. 5^4 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ $5^4=5^2\times 5^2$

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $25\equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow 5^2\equiv 4 \pmod 7$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\left.\begin{array}{l} 5^4\equiv 16 \pmod 7 \\ 16\equiv 2 \pmod 7 \end{array}\right\} \therefore 5^4\equiv 2 \pmod 7$

ಅಂದರೆ 5^4ಅನ್ನು 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಶೇಷವು 2 ಆಗಿದೆ.

6. 11^{132} ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$11\equiv 1 \pmod{10}$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad 11^2\equiv 1 \pmod{10}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(11^2)^{66}\equiv 1 \pmod{10}$

ಅಥವಾ $11^{132}\equiv 1 \pmod{10}$

ಅಂದರೆ 11^{132} ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1

1. ಯುಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ $a=210$, $b=55$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು $ax+by$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ.
2. 963 ಮತ್ತು 657 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $ax+by$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ.
3. 506 ಮತ್ತು 1155 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $ax+by$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

4. 352 ಮತ್ತು 891 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $ax + by$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ.

5. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡಿ. ಶೂನ್ಯವು (0) ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆ?

6. a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಯಾವಾಗ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

   (i) 10,49   (ii) 18,15   (iii) 220, 229

7. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $T(a)$ ಮತ್ತು $S(a)$ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   (i) $a = 1024$ (ii) $a = 2925$ (iii) $a = 5445$ (iv) $a = 6912$

8. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   (a) $2x \equiv 3 \pmod 3$ (b) $2x + 1 \equiv x + 5 \pmod 6$
   (c) $5x \equiv 4 \pmod{13}$ (d) $3(x+1) \equiv (x + 3) \pmod 4$
   (e) $4x + 3 \equiv 1 \pmod 8$

9. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಅಸೃಣ (ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕ) ಶೇಷಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

	ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	ಭಾಜಕ
(i)	$64 \times 65 \times 66$	67
(ii)	$135 \times 146 \times 73$	7
(iii)	2^{100}	5
(iv)	5^{100}	11
(v)	3^{175}	7

10. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   (i) 7^{100} (b) 3^{15} (c) 13^{37} (d) 3^{200}

> "ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದೇವರು ನಿರ್ಮಿಸಿದನು,
> ಉಳಿದಿದ್ದೆಲ್ಲಾ ಮನುಷ್ಯನಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದು."
> – ***ಕ್ರೋನೆಕರ್*** (1823-1891)

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

2.1 ಕೋಶಗಳು

ಗಣಾಪೊಂದರಲ್ಲಿನ mn ಅಂಶಗಳ m ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು n ಅಂಶಗಳ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿನ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು $m \times n$ ದರ್ಜೆಯ (ಪರಿಮಾಣದ) ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕೋಶಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೋಶವನ್ನು

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೋಶದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶವನ್ನು a_{ij} ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದು i ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮತ್ತು j ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ವಿವಿಧ ನಮೂನೆಯ ಕೋಶಗಳು:

1. **ಅಡ್ಡಸಾಲುಕೋಶ:** ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿರುವ ಕೋಶವನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.
   ಉದಾಹರಣೆ: $A = [1 \quad 2 \quad 3]$

2. **ಕಂಬಸಾಲು ಕೋಶ:** ಒಂದೇ ಒಂದು ಕಂಬಸಾಲಿರುವ ಕೋಶವನ್ನು ಕಂಬಸಾಲು ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$

3. **ಚೌಕಳಿ ಕೋಶ:** ಕೋಶವೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$

4. **ಕರ್ಣಕೋಶ:** ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಕರ್ಣಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 7\end{bmatrix}$

5. **ಅದಿಶಕೋಶ:** ಕರ್ಣಕೋಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಅದಿಶಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & a & 0\\0 & 0 & a\end{bmatrix}$

6. **ಏಕಮಾನಕೋಶ:** ಅದಿಶಕೋಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಏಕಮಾನಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

7. **ಶೂನ್ಯಕೋಶ:** ಕೋಶವೊಂದರಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಶೂನ್ಯಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $N=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

8. **ಅದಲುಕೋಶ:** A ಒಂದು $m \times n$ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದರ ಅದಲುಕೋಶವನ್ನು Aನಲ್ಲಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅದಲು ಕೋಶವನ್ನು A' ಅಥವಾ A^T ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅದಲುಕೋಶದ ದರ್ಜೆಯು $n \times m$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\6&7&8\end{bmatrix}_{2\times3}$ $A^T=\begin{bmatrix}1&6\\2&7\\3&8\end{bmatrix}_{3\times2}$

9. **ಸಮಾಂಗ ಕೋಶ:** $A=[a_{ij}]$ ಒಂದು n ದರ್ಜೆಯ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದು ಯಾವುದೇ i ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು j ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ $a_{ij}=a_{ji}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವನ್ನು ಸಮಾಂಗಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\begin{bmatrix}a&h&g\\h&b&f\\g&f&c\end{bmatrix}$

10. **ವಿಷಮಾಂಗ ಕೋಶ:** $A=[a_{ij}]$ ಒಂದು n ದರ್ಜೆಯ ಚೌಕುಳಿಕೋಶವಾಗಿದ್ದು ಎಲ್ಲ i, jಗಳಿಗೆ $a_{ij}=-a_{ji}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವನ್ನು ವಿಷಮಾಂಗ ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\begin{bmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{bmatrix}$

2.2 ಕೋಶಗಳ ಬೈಜಿಕ ಗುಣವಿಶೇಷಣಗಳು

1. ಕೋಶಗಳ ಸಂಕಲನ: A ಮತ್ತು B ಕೋಶಗಳು ಒಂದೇ ದರ್ಜೆಗಳಾದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂಕಲಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+6 \\ 3+2 & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶಗಳನ್ನು ವ್ಯವಕಲಿಸಬಹುದು

ಅಂದರೆ, $A - B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

2. ಕೋಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ: A ಕೋಶವು $m \times n$ ದರ್ಜೆಯದಾಗಿದ್ದು, B ಕೋಶವು $n \times p$ ದರ್ಜೆಯದಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ AB ಗುಣಲಬ್ಧವು $m \times p$ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕೋಶಗಳೆರಡನ್ನು ಗುಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಲು ಮೊದಲನೆಯದರ ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡನೆಯದರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times3+2\times4+3\times1 & 1\times2+2\times1+3\times3 \\ 1\times3+3\times4+1\times1 & 1\times2+3\times1+1\times3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $2A + 3B$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2A+3B=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 4 & 10\\ 2 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 18\\ 9 & 24\\ 27 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 16\\ 13 & 34\\ 29 & 14\end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}ax+hy+gz & hx+by+fz & gx+fy+cz\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

$$=\left[ax^2+hxy+gzx+hxy+by^2+zfy+gxz+fyz+cz^2\right]$$

$$=\left[ax^2+by^2+2hxy+2gxz+2fyz+z^2c\right]$$

3. $A=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $i=\sqrt{-1}$

ಆದರೆ $A^2=B^2=C^2=-I$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$A^2=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i^2 & 0\\ 0 & i^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=-I$$

ಇದೇ ರೀತಿ $B^2=C^2=-I$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ $A^2 = 3A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಆ ಮೂಲಕ $A^3 - A = 2A(A+I)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3A$$

ಈಗ $A^2 = 3A \Rightarrow A^3 = 3A^2$

ಅಥವಾ $A^3 = 2A^2 + A^2$

$A^3 = 2A^2 + 3A$

i.e. $A^3 - A = 2A^2 + 2A \cdot I$

$\therefore \quad A^3 - A = 2A(A+I)$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ A^3 ಒಂದು ಶೂನ್ಯಕೋಶವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಯೋಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳವ್ವಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. ಅದೇನೆಂದರೆ, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ಒಂದು ಚೌಕುಳಿಕೋಶವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು Δ ಒಂದು ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶಗಳ ಗಣದಿಂದ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವೊಂದಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ

$\Delta : M(2, R) \to R$. ಇಲ್ಲಿ Δ ದ ನಿರೂಪಣೆ

$$\Delta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ಇದೇ ರೀತಿ Δ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂರನೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶಗಳ ಗಣದಿಂದ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯಿಸಿದಾಗ, $\Delta : M(3, R) \to R$ ಅನ್ನು

$$\Delta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

1. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{ಎಂದಿರಲಿ}$$

ಆಗ $A = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$.

ಈಗ $|A|$ ನ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದ ನಿರ್ಧಾರಕವು $|A'|$ ಎಂದಿರಲಿ.

$|A'|$ ಅನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಿಂದ ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$|A'| = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

ಇದರಿಂದ $|A|=|A'|$ ಎನ್ನುವುದು ಸಾಧಿತವಾಗುವುದು.

2. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3) + c_1(a_2b_3-b_2a_3).$$

ಈಗ $|A|$ ನ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಿಂದ ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_1(b_2c_3-c_2b_3)+b_1(a_2c_3-c_2a_3) - c_1(a_2b_3-b_2a_3).$$

$$= -[a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3) + c_1(a_2b_3-b_2a_3)]$$

$$= -|A|$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ನಿರ್ಧಾರಕವು -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

3. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಅಥವಾ ಎರಡು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಅಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅಂತಹ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$|A| = a_1(b_2c_2 - c_2b_2) - b_1(a_2c_2 - c_2a_2) + c_1(a_2b_2 - b_2a_2).$$
$$= 0$$

4. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈಗ $\begin{vmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$$\begin{vmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= Ka_1(b_2c_3 - c_2b_3) - Kb_1(a_2c_3 - c_2a_3)$$
$$+ Kc_1(a_2b_3 - b_2a_3).$$
$$= K[a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3)$$
$$+ c_1(a_2b_3 - b_2a_3)]$$
$$= K|A|$$

5. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವೂ ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + x & b_1 + y & c_1 + z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) + x(b_2c_3 - c_2b_3) - y(a_2c_3 - c_2a_3) + z(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಪಡೆಯುವ ಮೊತ್ತದಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ

ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳಿಗೆ l ನಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಂಕಲಿಸಿದಾಗ

$$|B| = \begin{vmatrix} a_1 + la_2 + ka_3 & b_1 + lb_2 + kb_3 & c_1 + lc_2 + kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಮೇಲಿನ 4ನೇ ಮತ್ತು 5ನೇ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಧಾರಕವು

$$|B| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + l(0) + k(0)$$

$$\therefore\ |A| = |B|$$

7. A ಮತ್ತು B ಎರಡು 2×2 ದರ್ಜೆಯ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $|AB|=|A||B|$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ ಮತ್ತು $$B=\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ಕೋಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, $AB=\begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix}$

$|A|=ad-bc$, $|B|=wz-xy$ ಮತ್ತು

$$|AB|=(aw+by)(cx+dz)-[(ax+bz)(cw+dy)]$$

$$=adwz-adxy-bcwz-bcxy$$

$$=ad(wz-xy)-bc(wz-xy)$$

$$|AB|=(ad-bc)(wz-xy)$$

$$\therefore |AB|=|A||B|$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು R_1, R_2, R_3 ಎಂದು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು C_1, C_2, C_3 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ C_2-C_1 ಮತ್ತು C_3-C_2 ಮಾಡಿದಾಗ

$$\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}=0$$

($\because$ ಮಾರ್ಪಡಿಸಲಾದ C_2 ಮತ್ತು C_3 ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ $R_1 - R_2$ ಮತ್ತು $R_2 - R_3$ ಮಾಡಿದಾಗ

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ $|AB|$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$AB = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 32 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |AB| = \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 32 & 12 \end{vmatrix} = 240 - 160 = 80$$

4. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow[(R_2 - R_3)]{(R_1 - R_2)} \begin{vmatrix} 0 & a-b & b-a \\ 0 & b-c & c-b \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)[0] = 0$$

5. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow[(R_3-R_1)]{(R_2-R_1)} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)(1)(b+c+a)(c+a+b)$$

$$= 2(a+b+c)^3.$$

2.3.1 ಲಾಘವ, ಸಹಗುಣಕ ಮತ್ತು ಸಂಗತಕೋಶ

ಲಾಘವ: A ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿರಲಿ. Aನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶದ ಲಾಘವವು ಆ ಅಂಶವಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದಿರುವ ಉಪಕೋಶದ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ಎಂದಾದರೆ

a_{23} ಅಂಶದ ಲಾಘವವು, $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

ಆದ್ದರಿಂದ a_{ij} ಅಂಶದ ಲಾಘವವು M_{ij} ಎಂಬುವುದು i ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು j ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಹಗುಣಕ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ಚೌಕುಳಿಕೋಶದಲ್ಲಿನ a_{31} ನ ಲಾಘವ, $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

$(-1)^{3+1} M_{31}$ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು a_{31} ಅಂಶದ ಸಹಗುಣಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ a_{ij} ಅಂಶದ ಲಾಘವವು M_{ij} ಆದರೆ ಅದರ ಸಹಗುಣಕವು $(-1)^{i+j}$ M_{ij} ಆಗುವುದು.

ಸಂಗತಕೋಶ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿರಲಿ.

ಈ ಕೋಶದ ಸಹಗುಣಕಕೋಶವು $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಾಗಿರಲಿ.

ಈ ಕೋಶದ ಅದಲುಕೋಶವು $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$ ಆಗುವುದು.

ಈ ಅದಲುಕೋಶವನ್ನು A ನ ಸಂಗತಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ Adj A ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು.

2.3.2 ವೈಶೇಷಿತ ಮತ್ತು ಅವೈಶೇಷಿತ ಕೋಶಗಳು

A ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ನಿರ್ಧಾರಕವು $|A| = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ವೈಶೇಷಿತ ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ $|A| \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಅವೈಶೇಷಿತ ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2.3.3 ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ

A ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದು, $AB = BA = I$ ಆಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶ B ಇದ್ದರೆ, Bಅನ್ನು Aನ ಪ್ರತಿಲೋಮವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ I ಎಂಬುದು A, Bಗಳದ್ದೇ ದರ್ಜೆಯ ಏಕಮಾನಕೋಶ.

ಪ್ರಮೇಯ: A ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\, A = |A|I$$

ಸಾಧನೆ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಿರಲಿ.

Aನ ಸಹಗುಣಕ ಕೋಶ $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಾದರೆ

Aನ ಸಂಗತ ಕೋಶವು $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$A\,(\text{Adj } A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{22} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I$$

ಇದೇ ರೀತಿ $(\text{Adj } A)\, A = |A|I$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\, A = |A|I$ ಎನ್ನುವುದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವುದು.

ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮದ ಸ್ಪಷ್ಟನೆಗನುಗುಣವಾಗಿ ಯಾವುದೇ A ಎಂಬ ಅವ್ಯೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಅದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶ B ಆಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ಇರುವ ನಿಯಮ $AB = BA = I$ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ

$A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\, A = |A| I$ ಎನ್ನುವುದು ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ A ಒಂದು ಅವ್ಯೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶವಾದರೆ ಆಗ $|A| \neq 0$, ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $|A|$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$A\left(\frac{\text{Adj } A}{|A|}\right) = \left(\frac{\text{Adj } A}{|A|}\right) A = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} \qquad (\text{ಇಲ್ಲಿ } |A| \neq 0)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -x & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಒಂದು ವ್ಯೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A ಒಂದು ವ್ಯೈಶೇಷಿಕಕೋಶ ಆದ್ದರಿಂದ $|A| = 0$

ಅಥವಾ $\begin{vmatrix} 2 & -x & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore\ 2(-4) + x(1 + 6) + 3(-12) = 0$

$7x = 44 \Rightarrow x = \frac{44}{7}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ನ ಸಂಗತಕೋಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A ನ ಸಹಗುಣಕ ಕೋಶ = $\begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \ \text{Adj}\, A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$|A| = 2(-3-2) + 2(-2+2) + 4(2+3) = 10$$

$$\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -16 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj}\, A}{|A|} \quad = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 2 & -16 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/5 & -8/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ A^{-1} ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$$|A| = 1(9-16) - 2(3-4) + 3(4-3) = -2$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

2.4 ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ

(i) ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿ (ii) ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮ

2.4.1 ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿ: x, y, z ನಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ

x, y, z ಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳ ಕೋಶ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಕೋಶ $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು ಚರಾಂಕಗಳ ಕೋಶ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ $AX = B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು A^{-1} ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

i.e. $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$$IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

1. $x + y + z = 6$, $x - y + z = 2$, $2x + y - z = 1$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \therefore \ |A| = 1(0) - 1(-3) + 1(3) = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 1, y = 2$ ಮತ್ತು $z = 3$.

2.4.2 ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮ: x, y, z ನಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

x, y, z ನ ಸಹಾಂಕಗಳ ನಿರ್ಧಾರಕ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ($\Delta \neq 0$ ಆಗಿರಲಿ)

ಈಗ Δದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದರಿಂದ ಸಿಗುವ ನಿರ್ಧಾರಕವು

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಆಗಿರಲಿ

ಹಾಗೆಯೇ Δ_2, Δ_3 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ Δದಲ್ಲಿನ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಅಂಶಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಬಹುದು:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಮತ್ತು $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$ ಮತ್ತು $$z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1: $x + y + z = 6$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$-x + y - z = -2$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5) - 1(2) + 1(3) = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6(-5) - 1(-8) + 1(18) = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-8) - 6(2) + 1(12) = -8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 14 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-18) - 1(12) + 6(3) = -12$$

$$\therefore \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2; \quad y = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3$$

ಸೂಚನೆ: ಗೇಬ್ರಿಯಲ್ ಕ್ರೇಮರ್ (1704–1752) ಎಂಬಾತನು ಸ್ವಿಟ್ಜರ್ ಲ್ಯಾಂಡಿನ ಗಣಿತಜ್ಞ. ಜಿನಿವಾದಲ್ಲಿ 1750ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಈತನ ಪುಸ್ತಕವು ಪ್ರಖ್ಯಾತವಾಯಿತು.

2.5 ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲಗಳು

A ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದಾಗ $A - \lambda I$ ಅನ್ನು ಅದರ **ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಕೋಶವೆಂದೂ**, $|A - \lambda I| = 0$ ಆ ಕೋಶದ **ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವೆಂದೂ** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದ λ_1, λ_2,...... ಗಳನ್ನು **ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ

ಮೂಲಗಳನ್ನು ಗುಪ್ತಮೂಲ, ಅಥವಾ **ಆಯಿಗನ್ ವ್ಯಾಲ್ಯೂಸ್** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2.5.1 ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯ

ಪ್ರತಿ ಚೌಕುಳಿಕೋಶವು ತನ್ನದೇ ಆದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುವುದು.

(ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ).

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ಈ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವು $|A - \lambda I| = 0$

ಅಂದರೆ $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 6\lambda + 4 = 0$

ಅಥವಾ $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳು $2, -1 \pm \sqrt{3}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ಇವರ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{bmatrix} = 0$

ಅಥವಾ $(1 - \lambda)(-4 - \lambda)(7 - \lambda) = 0$

$\therefore$ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳು $1, -4, 7$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು

ಉಪಯೋಗಿಸಿ Aನ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವು $|A - \lambda I| = 0$

ಅಂದರೆ $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$

ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇರೆಗೆ

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$$

A^{-1} ನಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$A^2 - 6A + 7I + 2A^{-1} = 0$$

ಅಥವಾ $A^{-1} = \frac{1}{2}\left[-A^2 + 6A - 7I\right]$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -6-\lambda & 4 \\ 7 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ಅಂದರೆ $\quad (-6 - \lambda)(5 - \lambda) - 28 = 0$

ಅಥವಾ $\quad \lambda^2 + \lambda - 58 = 0$

ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, $A^2 + A - 58I = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಈಗ

$$A^2 + A - 58I = \begin{bmatrix} 64 & -4 \\ -7 & 53 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - 58\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 & 0 \\ 0 & 58 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 58 & 0 \\ 0 & 58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{R.H.S.}$$

∴ ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವು ದೃಢಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ A^{-1} ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

i.e. $-\lambda[(1-\lambda)(4-\lambda)] + 3 + 2(1-\lambda) = 0$

$$\therefore \quad \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 5 = 0$$

ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ

$$A^3 - 5A^2 + 6A - 5\text{I} = 0$$

A^{-1} ನಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ, $A^2 - 5A + 6I - 5A^{-1} = 0$

$$\therefore \quad 5A^{-1} = A^2 - 5A + 6I$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 0 \\ -10 & 5 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -12 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2

1. $A=\begin{bmatrix}9 & -2 & 0\\0 & 4 & 1\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\4 & 2 & 3\\7 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ಆದರೆ AB ಮತ್ತು BA ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -7\\0 & 3 & 8\end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B=\begin{bmatrix}-1 & 6 & 3\\1 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ಆದರೆ $(A+B)'=A'+B'$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3. $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ ಆದರೆ A^2 ಮತ್ತು A^3 ಕೋಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $A=[x \quad y \quad z]$, $B=\begin{bmatrix}a & h & g\\h & b & f\\g & f & c\end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $C=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ಆದರೆ $A(BC)=(AB)C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. $\begin{bmatrix}2x+y\\2x-4y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು yಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 5\end{bmatrix}$ ಆದರೆ $A^2-8A+13I$ ಎಂದು ಶೂನ್ಯಕೋಶವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\0 & 5 & -4\\4 & -2 & 8\end{vmatrix}=0$

8. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = 3a^2 + a^3$

9. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = ab + bc + ca + abc$

10. $\begin{vmatrix} 3 & 3^2 & 3^3 \\ 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 3^3 & 3^4 & 3^5 \end{vmatrix} = 0$

11. $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

12. $\begin{vmatrix} a^3+1 & a^2 & a \\ b^3+1 & b^2 & b \\ c^3+1 & c^2 & c \end{vmatrix} = (1+abc)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

14. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

15. $\begin{vmatrix} x+3 & -2 & 1 \\ 3 & x-2 & 1 \\ 3 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ ಆದರೆ xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

16. $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\begin{vmatrix} 0 & xy^2 & xz^2 \\ x^2y & 0 & yz^2 \\ x^2z & y^2z & 0 \end{vmatrix} = 2x^3y^3z^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. $\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $\begin{vmatrix} p & q+r & 1 \\ q & r+p & 1 \\ r & p+q & 1 \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

II ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಕೋಶಗಳ ಸಂಗತಕೋಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

III ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಕೋಶಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

IV ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ 2x - y + 5z &= 15 \\ 3x - 2y - 4z &= -13 \end{aligned}$ 2. $\begin{aligned} 4x + y &= 7 \\ 3y + 4z &= 5 \\ 3z + 5x &= 2 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 4y + 2z &= 7 \\ 3x + 2y - 9z &= 16 \end{aligned}$ 4. $\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 0 \\ 2x + 5y + z &= 1 \\ 3x + y - 2z &= 2 \end{aligned}$

V ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= -8 \\ 3x + 2y + 4z &= 3 \\ 5x - 4y + 5z &= 18 \end{aligned}$ 2. $\begin{aligned} 5x - 3y + 9 &= 0 \\ 8x + 14y + 5 &= 0 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x + 5y - 2z &= 3 \\ 3x + 7y - 7z &= 4 \end{aligned}$ 4. $\begin{aligned} 3x + y + 5z &= 10 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 9 \end{aligned}$

VI ಈ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(1) $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

VII ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಗಳು ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & a & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

VIII ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

> "ವಿಶ್ವದ ರಚನೆಗೆ ಕಾರಣನಾದ ಮಹಾನ್ ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪಿಯು
> ಈಗ ಒಬ್ಬ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞನಾಗಿ ತೋರಲಾರಂಭಿಸಿದ್ದಾನೆ."
>
> – ಜೇಮ್ಸ್ ಜೀನ್ಸ್

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಸಂಕುಲಗಳು

3.1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಮುಖ್ಯವಾದ **ಸಂಕುಲ** ಎಂಬ ಬೈಜಿಕ ರಚನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದು ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಶಾಖೆಯಾಗಿದೆ. ಎ.ಎಲ್.ಕೌಶಿ (Cauchy. 1789-1857) ಮತ್ತು ಇ. ಗ್ಯಾಲ್ವಾ (Galois. 1811-1832) ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮೊತ್ತಮೊದಲಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು. ಈಗ ಈ ಸಂಕುಲ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

$N = \{1.2.3.........\}$ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$Z = \{0. \pm 1. \pm 2. \pm 3..........\}$ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ

$Q = \{p/q . q \neq 0. p. q \in Z\}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$Q - \{0\} =$ ಸೊನ್ನೆ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$Q^{+} =$ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$R =$ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$R - \{0\} =$ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$R^{+} =$ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$M =$ ಎಲ್ಲಾ 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗಣ

$Z_m =$ ಮಾಡ್ಯುಲೋ m ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅಂದರೆ $0.1.2...(m-1)$ ಗಣ

$\oplus_m$ = ಮಾಡ್ಯುಲೋ m ಸಂಕಲನ

$\otimes_m$ = ಮಾಡ್ಯುಲೋ m ಗುಣಾಕಾರ

3.1.2 ಯುಗಳ (ದ್ವಿಮಾನ) ಪರಿಕ್ರಿಯೆ

S ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. *(ಸ್ಟಾರ್, ನಕ್ಷತ್ರ) ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು Sನ ಅಂಶಗಳಾದ a ಮತ್ತು bಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ $a*b$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. ಈ $a*b=c$ಯು ಕೂಡ Sನ ಅಂಶವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ *ನ್ನು **ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ** ಅಥವಾ **ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ $a, b \in S$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a*b=c \in S$ ಎಂಬ ಈ ಗುಣವನ್ನು * ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗೆ ಹೊಂದಿದಂತೆ S ಗಣದ ಆವೃತ ಗುಣ (ಕ್ಲೋಷರ್ ಪ್ರಾಪರ್ಟಿ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, S ಗಣದಲ್ಲಿ * ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕರವು $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನವು ಕೂಡ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: $7+10=17 \in N$

$6+13=19 \in N$, ಇತ್ಯಾದಿ

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $8 \times 11 = 88 \in N$

$6 \times 5 = 30 \in N$, ಇತ್ಯಾದಿ

2. ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರವು N ಗಣದಲ್ಲಿ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲ.

ಉದಾ: $9-14=-5 \notin N$

$5/15 = 1/3 \notin N$

ಆದ್ದರಿಂದ N ಗಣದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಕಾರವು ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲ.

3. Z, Q ಮತ್ತು R ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯವಕಲನವು ಒಂದು ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ.

4. ಆದರೆ $Q^+, R^+, Q-\{0\}$ ಮತ್ತು $R-\{0\}$ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ, ವ್ಯವಕಲನ ಎಲ್ಲವೂ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ.

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $\times$ ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ:

   (i) R ಗಣದಲ್ಲಿ $a \times b = \sqrt{ab}$

   (ii) Q ಗಣದಲ್ಲಿ $a \times b = \frac{ab}{8}$

   (iii) N ಗಣದಲ್ಲಿ $a \times b = ab$

   (iv) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in R \right\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರ

(i) $a = 3, b = -2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $a, b \in R$
ಆದರೆ $a \times b = \sqrt{3 \times -2} = \sqrt{-6} \notin R$ ಆದುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ $\times$ ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ ಅಲ್ಲ

(ii) $a \times b = \frac{ab}{9}$ ಎಂಬುದು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು $q \neq 0$, ಆದುದರಿಂದ

$a, b \in Q$ ಮತ್ತು $\frac{ab}{9} \in Q$ ಆದ್ದರಿಂದ, $\times$ ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ

(iii) N ಗಣದಲ್ಲಿ $a \times b = a^b$ ಯಾವಾಗಲೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
ಉದಾ: $5 \times 2 = 5^2 = 25 \in N$, ಆದ್ದರಿಂದ $\times$ ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ.

(iv) ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಯಾವುದೇ 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಪುನಃ ಅಂತಹುದೇ 2×2 ಮಾತೃಕೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ 2×2 ಮಾತೃಕೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮಾತೃಕೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಎರಡೂ ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3.1.3 ಸಂಕುಲ

ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ: Gಯು ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $*$ಯು G ಮೇಲಿನ ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ನಾಲ್ಕು ಲಕ್ಷಣಗಳು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಲ್ಲಿ Gಯನ್ನು $*$ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: $\forall a,b \in G,\ a*b \in G$

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: $\forall a,b,c \in G,\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

(iii) ಏಕದ ಅಸ್ತಿತ್ವ: $\forall a \in G,\ a \times e = e \times a = a$ ಆಗಿರುವಂತೆ $\exists e \in G$ ಹೀಗಿದ್ದಾಗ eಯನ್ನು **ಏಕದ** (ಅಥವಾ ಅನನ್ಯತಾಂಶ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iv) ವಿಲೋಮ ಅಂಶದ ಅಸ್ತಿತ್ವ: $\forall a \in G$

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e \text{ ಆಗಿರುವಂತೆ}$$

$\exists a^{-1} \in G$ ಹೀಗಿದ್ದಾಗ a^{-1}ನ್ನು Gಯಲ್ಲಿಯ aಅಂಶದ **ವಿಲೋಮ ಅಂಶ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ನಾಲ್ಕು ಲಕ್ಷಣಗಳು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಲ್ಲಿ Gಯನ್ನು $*$ಅನ್ವಯಿಸುವ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $(G,*)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ನಾಲ್ಕು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು Gಯು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ಪರಿವರ್ತನೀಯ** (ಅಥವಾ ಅಬೀಲಿಯನ್) ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(v) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: $\forall a,b \in G,\ a \times b = b \times a$

ಸೂಚನೆ: ಸಂಕುಲದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯನ್ನೇ ಪರಿಗಣಿಸುವುದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಲಕ್ಷಣವಾದ ಆವೃತಗುಣವು ಪುನರುಕ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ!

3.1.4 ಅರೆ ಸಂಕುಲಗಳು

ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣ Gಯ ಮೇಲೆ * ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದು, ಅದು ಆವೃತ ಗುಣ ಮತ್ತು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ಅರೆ ಸಂಕುಲ(ಸೆಮಿಗ್ರೂಪ್)** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: $(N,+)$, $\{R-\{0\}, \times\}$

ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲ

Gಯು ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ $(G, *)$ವು ಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲವೆಂದೂ, Gಯು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ $(G, *)$ವು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ **"ಸಾಂತ"** ಮತ್ತು **"ಅನಂತ"** ಸಂಕುಲಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಸಂಕುಲದ ಪರಿಮಾಣ

$(G, *)$ವು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದು, Gಗಣದಲ್ಲಿ n ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ nನ್ನು ಆ ಸಂಕುಲದ **ಪರಿಮಾಣ (ಆರ್ಡರ್)** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ: $O(G) = n$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣವು "+" ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಮೂಹ. ಇಲ್ಲಿ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವು

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 ....\}$$

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\forall a, b \in Z, \quad a+b \in Z$$

ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: $\forall a, b, c \in Z, \quad a+(b+c) = (a+b)+c$

ಉದಾ: $2, -5, 7 \in Z$

$$2+(-5+7)=2+2=4 \text{ ಆಗಿದ್ದು}$$

$$(2+(-5))+7=-3+7=4$$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

(iii) ಏಕದದ ಅಸ್ತಿತ್ವ: Zನಲ್ಲಿ '0' ಒಂದು ಅಂಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\forall a \in Z,\ a+0=0+a=a$$

ಆದುದರಿಂದ Zನಲ್ಲಿ 0(ಶೂನ್ಯ)ವು ಏಕದವು.

(iv) ವಿಲೋಮ ಅಂಶದ ಅಸ್ತಿತ್ವ:

Zನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ

$$\forall a \in Z,\ a+(-a)=(-a)+a=0$$

ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು $-a \in Z$ ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿದೆ.

(v) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: $\forall a, b \in Z,\ a+b=b+a$

ಆದುದರಿಂದ, $(Z, +)$ವು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ. Zನಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಅಂಶಗಳಿರುವುದರಿಂದ $(Z, +)$ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

2. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $(Q, +)$ ಮತ್ತು $(R, +)$ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು.

   $Q-\{0\}, R-\{0\}$ ಎರಡು ಗಣಗಳೂ ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲೂ ಅಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು

3. $G=\{1, -1\}$ ಎಂಬುದು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಏಕದವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ 1ರ ವಿಲೋಮ 1 ಮತ್ತು -1ರ ವಿಲೋಮ −1

4. M ಎಂಬುದು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು ಅವರ ಅಂಶಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ $(M, +)$ಯು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Big/ a, b, c, d \in R \right\}$$

(i) $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in M$

$$\therefore \quad A + B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = C$$

ಇಲ್ಲಿ $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ ಮತ್ತು $C \in M$ ಆದುದರಿಂದ $(M, +)$ ನಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಮೇಲಿನ (i)ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $A, B, C \in M$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ, $A + (B + C) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \right\}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & a_4 + b_4 + c_4 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $(A + B) + C = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ ಬಂದಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.
ಆದುದರಿಂದ $(M,+)$ನಲ್ಲಿ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) $O=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ಎಂಬುದು $(M,+)$ನಲ್ಲಿ ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ,

$$A+O=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}=A \quad ...(1)$$

ಅಂತೆಯೇ, $O+A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}=A \quad ..(2)$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ, $A+0=0+A=A$
ಆದುದರಿಂದ $(M,+)$ನಲ್ಲಿ ಏಕದವಿರುತ್ತದೆ.

(iv) $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}$ ಎಂಬ ಮಾತೃಕೆಗೆ

$-A=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2\\ -a_3 & -a_4\end{bmatrix}$ ಎಂಬುದು Aಯ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
ಅಂದರೆ, $A+(-A)=0=(-A)+A$
ಆದುದರಿಂದ, Mನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾತೃಕೆಗೂ ಅದರ ವಿಲೋಮವಿದೆ.

(v) $A+B=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2\\ a_3+b_3 & a_4+b_4\end{bmatrix} \quad ...(1)$

$$B+A=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_1+a_1 & b_2+a_2\\ b_3+a_3 & b_4+a_4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

ಏಕೆಂದರೆ, +ಪರಿಕರ್ಮವು Rನಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
ಆದುದರಿಂದ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $A + B = B + A$
ಅಂದರೆ, $(M, +)$ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

5. $Q-\{1\}$ನಲ್ಲಿ '$*$' ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯು $a * b = a + b - ab$ ಆದಾಗ $(Q-\{1\}, *)$ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದರಲ್ಲಿ $\frac{5}{3} * x = 3^{-1}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $Q-\{1\}$ ಅಂದರೆ 1 ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.
ಈಗ, $a, b \in Q-\{1\}$ ಆಗಿರಲಿ.

(i) ಆವೃತ ಗುಣ

$a * b = a + b - ab$ ಎಂಬುದು ಕೂಡ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಅಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. $a * b$ ಎಂಬುದು 1 ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$a + b - ab = 1$$
ಅಥವಾ $a + b - ab - 1 = 0$
ಅಥವಾ $(a-1)(b-1) = 0$

ಆದರೆ, $a = 1$ ಅಥವಾ $b = 1$, ಇವು ಎರಡೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
ಏಕೆಂದರೆ, $a, b \in (Q-\{1\})$
ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ

$$a * (b * c) = a * (b + c - bc)$$
$$= a + b + c - bc - a(b + c - bc)$$
$$= a + b + c - bc - ab - ac + abc \quad ...(1)$$

$$(a * b) * c = (a + b - ab) * c$$
$$= a + b - ab + c - (a + b - ab)c$$
$$= a + b - ab + c - ac - bc + abc \quad ...(2)$$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2)ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.
ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(iii) ಏಕದದ ಅಸ್ತಿತ್ವ: eಯು ಏಕದವಾಗಿದ್ದರೆ

$$a * e = e * a = a \quad \forall a \in Q - \{1\}$$

$$a * e = a \text{ ಮತ್ತು } e * a = a$$

ಅಂದರೆ, $a + e - ae = a$ ಮತ್ತು $e + a - ea = a$

ಅಥವಾ $e - ae = 0$ ಮತ್ತು $e - ea = 0$

ಅಥವಾ $e(1 - a) = 0$ ಮತ್ತು $e(1 - a) = 0$

$\therefore \quad e = 0$ ಅಥವಾ $a = 1$

ಆದರೆ, $a = 1$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ $a \in Q - \{1\}$

ಆದುದರಿಂದ, '0'ವು ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ವಿಲೋಮ ಅಂಶದ ಅಸ್ತಿತ್ವ

$a \in Q - \{1\}$ ಅಂಶದ ವಿಲೋಮ xಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ

$a * x = x * a = 0$, ಏಕದಾಂಶ

$\therefore \; a * x = 0$ ಮತ್ತು $x * a = 0$

ಅಥವಾ $a + x - ax = 0$ ಮತ್ತು $x + a - xa = 0$

ಅಥವಾ $x - ax = -a$ ಮತ್ತು $x - xa = -a$

ಅಥವಾ $x(1 - a) = -a$ ಮತ್ತು $x(1 - a) = -a$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{a - 1}$$

ಇಲ್ಲಿ $a - 1 \neq 0$ ಏಕೆಂದರೆ $a \in Q - \{1\}$

$\therefore \; a$ಯ ವಿಲೋಮವು $\dfrac{a}{a-1}$ ಮತ್ತು $\dfrac{a}{a-1} \in Q - \{1\}$

(v) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣಗಳು

ಯಾವುದೇ ಅಂಶಗಳಾದ $a, b \in Q - \{1\}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$a * b = a + b - ab$$

$$b * a = b + a - ba$$

$Q-\{1\}$ ರಲ್ಲಿ $a+b=b+a,\ ab=ba$

$\therefore \quad a\circ b=b\circ a$

ಆದುದರಿಂದ, $Q-\{1\}$ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ

ಈಗ, $\frac{5}{3}\circ x=3^{-1}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ನಮಗೆ $a^{-1}=\frac{a}{a-1}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \quad 3^{-1}=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$

$\frac{5}{3}\circ x=3^{-1}$ ವನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ:

$$\frac{5}{3}+x-\frac{5}{3}x=\frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=x\left(\frac{5}{3}-1\right) \text{ ಅಥವಾ } \frac{1}{6}=x\frac{2}{3}$$

ಆದುದರಿಂದ $x=\frac{1}{4}$.

6. $A_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ ಎಂಬ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗಣವು (α ವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$G=\{A_\alpha \mid \alpha\in R\}$. $A_\alpha, A_\beta\in G$ ಆಗಿರಲಿ

(i) $A_\alpha\cdot A_\beta=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}=A_{\alpha+\beta}\in G$$

ಏಕೆಂದರೆ α, β ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\alpha+\beta$ ವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, Gನಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವು ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(ii) $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣದಲ್ಲೂ ಈ ಗುಣವು ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(iii) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = A_0$ ಎಂಬುದು ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಮಾತೃಕೆ Aಯ ವಿಲೋಮ $A^{-1} = \dfrac{Adj\, A}{|A|}$

ಇಲ್ಲಿ, $|A_\alpha| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0 \quad \therefore \quad A_\alpha^{-1}$ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ.

$$Adj\, A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = A_{-\alpha} \in G$$

ಆದುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ಅಂಶ A_α ಕ್ಕೂ ವಿಲೋಮವು ಇದೆ.

(v) $A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix} = A_\beta \cdot A_\alpha$$

α, β ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\therefore \quad A_\alpha \cdot A_\beta = A_\beta \cdot A_\alpha$$

ಅಂದರೆ, Gಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ

3.1.5 ಮಾಡ್ಯುಲೊ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ

Z_6 ನಲ್ಲಿ ಮ್ಯಾಡುಲೋ 6 ಸಂಕಲನದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ.

$Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\oplus_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\oplus_6$ ಸಂಕಲನದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು Z_6 ನ ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿದು. ಅದನ್ನು 6ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಶೇಷವನ್ನು ಸಂಧಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

1. ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಗಣಿತದ ಸಂಕುಲಗಳು

$Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5 ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ $(Z_5, \oplus_5)$ ಯು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\oplus_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(i) ಆವೃತ ಗುಣ:

ಕೋಷ್ಟಕದ ದಾಖಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ Z_5ಗೆ ಸೇರಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತಗುಣ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:

Z_5ನ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಉದಾ:

$$(2 \oplus_5 4) \oplus_5 3 = 1 \oplus_5 3 = 4$$

ಮತ್ತು $2 \oplus_5 (4 \oplus_5 3) = 2 \oplus_5 2 = 4$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ

(iii) ಏಕಮವು 0 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ಸಾಲಿನ ಅಪ್ಪಗಳು ಮೇಲಿನ ಸಾಲಿನ ತದ್ರೂಪವಾಗಿದೆ

(iv) 0ವು ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಅಂಶವು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.

$0 + 0 = 0$

$1 + 4 = 4 + 1 = 0,\ 4 + 1 = 1 + 4 = 0$

$2 + 3 = 3 + 2 = 0 \quad \therefore\ (0)^{-1} = 0,\ (2)^{-1} = 3,\ (4)^{-1} = 1$

$3 + 2 = 2 + 3 = 0 \qquad (1)^{-1} = 4,\ (3)^{-1} = 2$

ಪ್ರತಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ ವಿಲೋಮವಿದೆ.

(v) ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ಣದ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ ಕೆಳಗಡೆಯ ಪ್ರತಿ ಫಲಿತ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವು ನಿಜವಾಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ $(Z_5, \oplus_5)$ ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

2. $G = \{2, 4, 6, 8\}$ ಇದು ಮಾಡ್ಯುಲೊ 10ರ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

$\otimes_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ದಾಖಲೆಗಳು Gಗೆ ಸೇರಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣ ನಿಜವಾಗಿದೆ

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: Gಯ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾ: $2, 6, 8 \in G$

$$(2 \otimes 6) \otimes 8 = 2 \otimes 8 = 6$$
$$2 \otimes (6 \otimes 8) = 2 \otimes 8 = 6$$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) ಏಕದವು '6' ಆಗಿದೆ; ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆ '6' ಆಗಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಅದರ ಮೇಲಿನ ಸಾಲಿಗೆ ತದ್ರೂಪವಾಗಿದೆ.

(iv) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶವು ತಿಳಿದಿರುತ್ತದೆ.

$$2 \otimes 8 = 8 \otimes 2 = 6 \qquad \therefore \ (2)^{-1} = 8$$
$$4 \otimes 4 = 4 \otimes 4 = 6 \qquad \therefore \ (4)^{-1} = 4$$
$$6 \otimes 6 = 6 \otimes 6 = 6 \qquad \therefore \ (6)^{-1} = 6$$
$$8 \otimes 2 = 2 \otimes 8 = 6 \qquad \therefore \ (8)^{-1} = 2$$

ಅಂದರೆ. ಪ್ರತಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ ವಿಲೋಮವಿದೆ.

(v) ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮುಖ್ಯಕರ್ಣದ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ ಕೆಳಗಡೆ ಪ್ರತಿಫಲಿತ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವೂ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ Gಯು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

3. $G = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ ಇದು ಮಾಡ್ಯುಲೊ 11ರ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

$\otimes_{11}$	1	3	5	7	8
1	1	3	5	7	8
3	3	9	4	10	2
5	5	4	3	2	7
7	7	10	2	5	1
8	8	2	7	1	9

ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ದಾಖಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶಗಳು 9, 10, 4 $\notin G$ ಅಂದರೆ ಆವೃತ ಗುಣವು ನಿಜವಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ Gಯು ಸಂಕುಲವಲ್ಲ.

3.2 ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಕುಲ

$A = \{a, b, c\}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

A ಯಲ್ಲಿ 3 ಅಂಶಗಳಿದ್ದು $^{3}P_3 = 6$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದು ಗಣವು ಈ 6 ವಿವಿಧ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ಸಮಮಿತ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಗಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು S_3 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ ಈ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುತ್ತೇವೆ.

$$S_3 = \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}\right]$$

ಈ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದಾಗ

$$S_3 = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}.$$

ಎರಡು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎರಡು ಕ್ರಮಯೋಜನೆ P_3 ಮತ್ತು P_4 ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ

$$P_3 \cdot P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = P_0$$

ಎರಡನೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಮೊದಲಿನ ಸಾಲನ್ನು ಒಂದನೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಎರಡನೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಆಗ

$$P_3 \cdot P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = P_0$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $P_3 \cdot P_2$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈಗ, $P_2 \cdot P_1$ ಮತ್ತು $P_1 \cdot P_2$ ಗಳನ್ನು ಪರಿಶಿಲಿಸೋಣ:

$$P_2 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & a & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = P_4$$

$$\therefore \quad P_2 \cdot P_1 = P_4$$

ಹಾಗೆಯೇ, $P_1 \cdot P_2$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ:

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = P_3$$

$$\therefore \quad P_2 \cdot P_1 \neq P_1 \cdot P_2$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.

ಏಕದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ

$$P_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

ಉದಾಹರಣೆ

$$P_0 \cdot P_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = P_5$$

ವಿಲೋಮ ಕ್ರಮಂಯೋಜನೆ

$$P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

ಎಂಬುದರ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಮಂಯೋಜನೆಯು P_1 ನ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = P_1 \quad \therefore \quad P_1^{-1} = P_1$$

ಹಾಗೆಯೇ, $P_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = P_4 \qquad \therefore \quad P_3^{-1} = P_4$$

ಪ್ರಮೇಯ: ಕ್ರಮಂಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ವಿಧಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಂಯೋಜನೆಗಳ ಗಣ S_3 ಒಂದು ಸಂಕುಲ.

ಸಾಧನೆ: $S = \{a, b, c\}$ ಆದಾಗ

$$S_3 = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$$

ಇಲ್ಲಿ $P_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ $P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$

$$P_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

ಮೊದಲು ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ:

·	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_3	P_2	P_5	P_4
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_1	P_4	P_0	P_2
P_4	P_4	P_2	P_5	P_0	P_3	P_1
P_5	P_5	P_3	P_4	P_1	P_2	P_0

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ಥಾನಗಳೂ ತುಂಬಿವೆ ಮತ್ತು ಅಂಶಗಳೂ S_3 ಯಲ್ಲಿವೆ. ಹಾಗೂ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಅಂಶಗಳಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: ಉದಾಹರಣೆಗೆ P_3, P_1, P_5 ಈ ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

ಈಗ, $(P_3 \cdot P_1) \cdot P_5 = P_5 \cdot P_5 = P_0$

ಮತ್ತು $P_3 \cdot (P_1 \cdot P_5) = P_3 \cdot P_4 = P_0$

$\therefore \quad (P_3 \cdot P_1) \cdot P_5 = P_3 \cdot (P_1 \cdot P_5)$

ಹೀಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಮನಗಾಣಬಹುದು.

(iii) ಏಕಮ ಅಂಶ: ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ P_0 ನ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P_0 ವು ಏಕಮ ಅಂಶ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ವಿಲೋಮ: ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ

$$P_0^{-1} = P_0 \qquad P_3^{-1} = P_4$$

$$P_1^{-1} = P_1 \qquad P_4^{-1} = P_3$$

$$P_2^{-1} = P_2 \qquad P_5^{-1} = P_5$$

ಅಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ವಿಲೋಮಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, S_3 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲ. ಆದರೆ **ಇದು ಅಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.**

3.3 ಒಂದರ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ, ಚತುರ್ಥ ಮೂಲಗಳು

ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

1. ಒಂದರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು

$x = \sqrt{-1}$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore \quad x^2 = 1$ ಅಥವಾ $x^2 - 1 = 0$

ಅಥವಾ $(x-1)(x+1) = 0$

ಅಂದರೆ, $x = 1, -1$ ಇವುಗಳು ಒಂದರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು

ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ: $G = \{1, -1\}$ ಆಗಿರಲಿ.

×	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳೂ Gಯಲ್ಲಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:

$1, -1, 1 \in G$

$\{1 \times (-1)\} \times 1 = -1 \times 1 = -1$

$1 \times \{(-1) \times 1\} = 1 \times -1 = -1$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) 1 ಇದು ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ

(iv) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $1 \times 1 = 1 \quad \therefore \ (1)^{-1} = 1$

$(-1) \times (-1) = 1 \quad \therefore \ (-1)^{-1} = -1$

ಆದುದರಿಂದ Gನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ವಿಲೋಮಗಳಿವೆ.

(v) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವೂ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

ಹೀಗೆ, ಒಂದರ ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳು ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

2. ಒಂದರ ಘನಮೂಲಗಳು

$x = 1^{\frac{1}{3}}$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore \quad x^3 - 1 = 0$

ಅಥವಾ $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

ಅಥವಾ $x - 1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + x + 1 = 0$

ಆದರೆ, $x = 1$

ಮತ್ತು $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ

$$\omega^2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 3i^2 - 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1, \omega, \omega^2$ ಒಂದರ ಘನಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

$G = \{1, \omega, \omega^2\}$ ಆಗಿರಲಿ

G ಗಣದಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೋಷ್ಟಕ:

.	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

ಏಕೆಂದರೆ, $\omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$

$\omega^2 \cdot \omega^2 = \omega^4 = \omega \cdot \omega^3 = \omega \cdot 1 = \omega$

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳೂ Gಯಲ್ಲಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: $\omega^2, 1, \omega \in G$

ಈಗ, $(\omega^2 \cdot 1) \cdot \omega = \omega^3 = 1$

ಮತ್ತು $\omega^2 \cdot (1 \cdot \omega) = \omega^3 = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) 1 ಏಕದವಾಗಿದೆ

(iv) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $1 \cdot 1 = 1$ $\quad \therefore \ (1)^{-1} = 1$

$\omega \cdot \omega^2 = \omega^2 \cdot \omega = 1 \quad \therefore \ (\omega)^{-1} = \omega^2$

$\omega^2 \cdot \omega = \omega \cdot \omega^2 = 1 \quad (\omega^2) = \omega$

ಆದುದರಿಂದ Gಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ವಿಲೋಮಗಳಿವೆ.

(v) ಕೋಷ್ಟಕದ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ಣದ ಕೆಳಗೆ ಮತ್ತು ಮೇಲೆ ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. ಹೀಗೆ, 1ರ ಘನಮೂಲಗಳ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ

3. ಒಂದರ ಚತುರ್ಥ ಮೂಲಗಳು

$x = 1^{\frac{1}{4}}$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore \quad x^4 = 1$

ಅಥವಾ $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$

ಅಥವಾ $x^2 - 1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + 1 = 0$

ಅಥವಾ $(x - 1)(x + 1) = 0$ ಮತ್ತು $x^2 = -1$

$\therefore \quad x = \pm 1, \pm\sqrt{-1} = \pm 1, \pm i$

ಅಂದರೆ, $\{1, -1, i, -i\}$ಯು 1ರ ಚತುರ್ಥ ಮೂಲಗಳ ಗಣ.

$G = \{1, -1, i, -i\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೋಷ್ಟಕ.

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳೂ Gಯಲ್ಲಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: $-1, i, -i \in G$ ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಈಗ $-1 \times (i \times -i) = -1 \times 1 = -1$

ಮತ್ತು $(-1 \times i) \times -i = -i \times -i = i^2 = -1$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) 1 ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ

(iv) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $1 \times 1 = 1$ $\quad \therefore \quad (1)^{-1} = 1$

$(-1) \times (-1) = 1 \quad \therefore \quad (-1)^{-1} = -1$

$i \times (-1) = -i \times i = 1 \quad \therefore \quad (+i)^{-1} = -i$

$-i \times i = i \times -i = 1 \quad \therefore \quad (-i)^{-1} = i$

ಆದುದರಿಂದ Gಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ವಿಲೋಮಗಳಿವೆ.

(v) ಕೋಷ್ಟಕದ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ, ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ $\{1, -1, +i, -i\}$ಯು ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

3.4 ಸಂಕುಲದ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ 1: ಸಂಕುಲದ ಏಕದವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ

ಸಾಧನೆ: $(G, *)$ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿರಲಿ.

ಅದರಲ್ಲಿ, e ಮತ್ತು e' ಎರಡು ಏಕದವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, e ಯು ಏಕದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$e' * e = e * e' = e' \qquad ...(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ, e' ಯು ಏಕದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$e * e' = e' * e = e \qquad ...(2)$$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ $e = e'$

ಆದುದರಿಂದ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಏಕದವಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2: $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅಂಶದ ವಿಲೋಮವೂ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ: $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ e ಯು ಏಕದವಾಗಿರಲಿ

aಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶವಾಗಿರಲಿ. b ಮತ್ತು cಗಳು aಯು ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅಂಶ bಯು aಯ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುವ ಕಾರಣ

$$a * b = b * e = e \qquad ...(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ cಯು aಯ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುವ ಕಾರಣ

$$a * c = c * a = e \qquad ...(2)$$

ಈಗ, $b = b * e$ [ಏಕದದ ಗುಣದಿಂದ]

$= b * (a * c)$ [(2) ರಿಂದ]

$= (b * a) * c$ [ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣದಿಂದ]

$= e * c$ [(1) ರಿಂದ]

ಅಂದರೆ, $b = c$ [ಏಕದದ ಗುಣದಿಂದ]

ಆದುದರಿಂದ, a ಯ ವಿಲೋಮವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3: $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ aಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ $(a^{-1})^{-1} = a$.

ಸಾಧನೆ: a ಅಂಶದ ವಿಲೋಮ $a^{-1} = x$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad x * a = a^{-1} * a = e$ [ವಿಲೋಮ ಗುಣದಿಂದ]

ಮತ್ತು $\quad a * x = a * a^{-1} = e$

$\therefore \quad x * a = a * x = e$

ಇದರಿಂದ xನ ವಿಲೋಮವು a ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad x^{-1} = a$

ಅಂದರೆ, $\quad (a^{-1})^{-1} = a$

ಪ್ರಮೇಯ 4: a ಮತ್ತು bಗಳು $(G, \times)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(a \times b)^{-1} = b^{-1} \times a^{-1}$.

ಸಾಧನೆ: ಈ ಮುಂದಿನ 'ಗುಣಲಬ್ಧ'ವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$(a \times b) \times (b^{-1} \times a^{-1})$

$= a \times [b \times (b^{-1} \times a^{-1})]$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$= a \times [(b \times b^{-1}) \times a^{-1}]$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$= a \times (e \times a^{-1})$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$= a \times a^{-1}$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$= e$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$\therefore \quad (a \times b) \times (b^{-1} \times a^{-1}) = e \quad \ldots(1)$

$(b^{-1} \times a^{-1}) \times (a \times b)$

$= b^{-1} \times [a^{-1} \times (a \times b)]$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$= b^{-1} \times [(a^{-1} \times a) \times b]$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$= b^{-1} \times [e \times b]$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$= b^{-1} \times b$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$= e$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$\therefore \quad (b^{-1} \times a^{-1}) \times (a \times b) = e$ ...(2)

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ

$$(a \times b) \times (b^{-1} \times a^{-1}) = (b^{-1} \times a^{-1}) \times (a \times b) = e$$

ಅಂದರೆ, $(a \times b)$ ದ ವಿಲೋಮವು $b^{-1} \times a^{-1}$

$\therefore \quad (a \times b)^{-1} = b^{-1} \times a^{-1}$

ಪ್ರಮೇಯ 5: ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ನಿರಸನ ನಿಯಮಗಳು

a, b, c ಗಳು $(G, *)$ ಸಂಕುಲದ ಯಾವುದೆ 3 ಅಂಶಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ (i) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ ಎಡ ನಿರಸನ ನಿಯಮ

(ii) $a * b = c * b \Rightarrow a = c$ ಬಲ ನಿರಸನ ನಿಯಮ

ಸಾಧನೆ:

(i) $a * b = a * c$ ...(1)

ಆಗಿರಲಿ, ಯಾವುದೇ ಅಂಶ

$a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$

ಈಗ, (1)ರಿಂದ

$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$\therefore \quad (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $e * b = e * c$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $b = c$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$\therefore \quad a * b = a * c \Rightarrow b = c$

(ii) $a * b = c * b$ ...(2)

ಆಗಿರಲಿ. ಯಾವುದೇ ಅಂಶ

$b \in G \Rightarrow b^{-1} \in G$

ಈಗ, $(a*b)*b^{-1} = (c*b)*b^{-1}$ [(2) ರಿಂದ]

$\therefore$ $a*(b*b^{-1}) = c*(b*b^{-1})$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $a*e = c*e$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$\therefore$ $a = c$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$\therefore$ $a*b = c*b \Rightarrow a = c$

ಪ್ರಮೇಯ 6: a ಮತ್ತು bಗಳು $(G,*)$ಯ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $a*x = b$ ಮತ್ತು $y*a = b$ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರಗಳು $(G,*)$ಯಲ್ಲಿದ್ದು ಅವು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ:

(i) $(a*x) = b$ ...(1)

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$a \in G$ $\therefore$ $a^{-1} \in G$

ಈಗ, $a^{-1}*(a*x) = a^{-1}*b$ [(1) ರಿಂದ]

ಅಥವಾ $(a^{-1}*a)*x = a^{-1}*b$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $e*x = a^{-1}*b$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $x = a^{-1}*b$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = a^{-1}*b \in G$ ಯು $a*x = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಈಗ, ಈ ಪರಿಹಾರವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. x_1 ಮತ್ತು x_2 ಇವು ಎರಡೂ ಅಂಶಗಳು $a*x = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $a*x_1 = b$, $a*x_2 = b$

$\therefore$ $a*x_1 = a*x_2$

$\therefore$ $a^{-1}*(a*x_1) = a^{-1}*(a*x_2)$

ಅಥವಾ $(a^{-1}*a)*x_1 = (a^{-1}*a)*x_2$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಆದರೆ, $e*x_1 = e*x_2$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$\therefore \quad x_1 = x_2$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

ಅಂದರೆ, $a * x = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

(ii) ಈಗ, ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

$$y * a = b \qquad ...(2)$$

$$a \in G \quad \therefore \; a^{-1} \in G$$

$$\therefore \quad (y * a) * a^{-1} = b * a^{-1}$$

ಅಥವಾ $y * (a * a^{-1}) = b * a^{-1}$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$y * e = b * a^{-1}$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$y = b * a^{-1}$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$\boldsymbol{y = b * a^{-1} \in G}$ ಯು $y * a = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಈ ಪರಿಹಾರವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, y_1 ಮತ್ತು y_2 ಎರಡೂ $y * a = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿರಲಿ.

$y_1 * a = b$ ಮತ್ತು $y_2 * a = b$

$$\therefore \quad y_1 * a = y_2 * a$$

$$\therefore \quad (y_1 * a) * a^{-1} = (y_2 * a) * a^{-1}$$

ಅಥವಾ $y_1 * (a * a^{-1}) = y_2 * (a * a^{-1})$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $y_1 * e = y_2 * e$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $y_1 = y_2$ (ಏಕದ ಗುಣ)

$\therefore$ $y * a = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

3.5 ಉಪಸಂಕುಲಗಳು

$(G, *)$ ಯು ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿರಲಿ H ಎಂಬುದು Gಯ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ. $(H, *)$ ಕೂಡ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾದರೆ ಅದನ್ನು Gಯ ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $G=\{1,-1,i,-i\}$ಯು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

   $H=\{1,-1\}$ಯು Gಯ ಉಪಗಣ ಮತ್ತು ಇದು ಕೂಡ ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

   ಆದುದರಿಂದ H ಮತ್ತು Gಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

2. $(R,+)$ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

   $I\subset R$, $(I,+)$ ಕೂಡ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

3. $G=\{1,-1,i,-i\}$ ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

   $H=\{1,i\}\subset G$ ಆದರೆ H ಉಪಸಂಕುಲವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ

   $i\cdot i=i^2=-1\notin H$. ಅಂದರೆ, Hನಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವು ನಿಜವಲ್ಲ.

ಸೂಚನೆ: $(G,*)$ ಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ G ಮತ್ತು $\{e\}$ಗಳನ್ನು ಅನುಚಿತ (ಇಂಪ್ರಾಪರ್) ಉಪಸಂಕುಲಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 1:

$(G,*)$ ಎಂಬ ಸಂಕುಲದ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣ H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು:

(i) $\forall a,b\in H,\quad a*b\in H$

(ii) $\forall a\in H,\ a^{-1}\in H$

ಸಾಧನೆ:

1. $(H,*)$ ಎಂಬುದು $(G,*)$ಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿರಲಿ.

   ಈಗ, (i) $\forall a,b\in H,\quad a*b\in H$ ಮತ್ತು

   (ii) $\forall a\in H,\ a^{-1}\in H$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$(H,*)$ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದೂ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತಗುಣ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ ಗುಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$\forall a,b \in H,\ a*b \in H$

$\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$

2. $H \subset G$ ಮತ್ತು

(i) $\forall a,b \in H,\ a*b \in H$ ಮತ್ತು

(ii) $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈಗ, H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು

(i) ಮತ್ತು (ii)ರಿಂದ ಆವೃತಗುಣ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮಗುಣಗಳು Hನಲ್ಲಿ ನಿಜ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(i)ನಲ್ಲಿ bಯು ಬದಲಿಗೆ a^{-1}ನ್ನು ಬರೆದಾಗ

$$a*a^{-1} \in H$$

ಅಥವಾ $e \in H$

ಅಂದರೆ ಏಕದವು Hನಲ್ಲಿ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಸಹಪರ್ತನೀಯ ಗುಣವು Gಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. $H \subset G$ ಆದುದರಿಂದ ಇದು Hನ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ (H, *)ನಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲದ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ (H, *) ಎಂಬುದು (G, *) ಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2:

Gಯ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣ H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ ಅದು $\forall a,b \in H,\ a*b^{-1} \in H$ ಎಂಬ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

ಸಾಧನೆ:

1. (H, *) ಎಂಬುದು (G, *)ಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿರಲಿ.

ನಾವು $\forall a,b \in H,\ a*b^{-1} \in H$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಆದುದರಿಂದ (G, *)ಯ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳು (H, *)ನಲ್ಲಿ ಇವೆ.

ಈಗ $b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

ಹಾಗೆಯೇ, $a \in H, b^{-1} \in H$

$\therefore \quad a * b^{-1} \in H$ (ಆವೃತ ಗುಣ)

2. $H \subset G$ ಮತ್ತು $\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$ ಇರಲಿ.

ನಾವು H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $a * b^{-1} \in H \; \forall a, b \in H$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಇವರಲ್ಲಿ bಯ ಬದಲು aನ್ನು ಬರೆದಾಗ

$$a * a^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$$

ಅಂದರೆ, ಏಕದವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ.

$a * b^{-1} \in H$ ಇವರಲ್ಲಿ aಯ ಬದಲು e ಬರೆದಾಗ

$$e * b^{-1} \in H \qquad \therefore \; b^{-1} \in H$$

ಅಂದರೆ, ವಿಲೋಮಗುಣ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

$a * b^{-1} \in H$ ಇವರಲ್ಲಿ bಯನ್ನು b^{-1}ನಿಂದ ಬದಲಿಸಿದಾಗ

$$a * (b^{-1})^{-1} \in H$$

ಅಥವಾ $a * b \in H$

ಅಂದರೆ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. $H \subset G$ ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು Hನಲ್ಲೂ ನಿಜವೆನಿಸಿದೆ. ಅಂದರೆ, Hನಲ್ಲಿ Gಯ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳೂ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ $(H, *)$ ಎಂಬುದು $(G, *)$ಯ ಉಪಸಂಕುಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $Z = \{..........,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,..........\}$ ಮತ್ತು
   $H = \{..........,-3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m..........\}$

(m ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಆಗಿದ್ದರೆ, $(H, +)$ ಎಂಬುದು $(Z, +)$ನ ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ $(Z, +)$ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈಗ, $H \subset G$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$$ab^{-1} \in H \ \forall a, b \in H$$

ಆದರೆ Hಎಂಬುದು Gಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗುವುದು.

$$a = rm, \ b = sm$$

ಎಂಬುವು ಎರಡು Hನ ಅಂಶಗಳಾಗಲಿ. ಇಲ್ಲಿ r ಮತ್ತು s ಎಂಬುವು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಗಳು.

ಇಲ್ಲಿ, $b = sm$ ಆದರೆ $b^{-1} = -sm$

ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯು ಸಂಕಲನ

$$\therefore \quad ab^{-1} = rm - sm$$

$$= (r - s)m$$

$$= km$$

(ಕಾರಣ $r - s = k$ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ)

ಅಂದರೆ, $ab^{-1} = km \in H$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(H, +)$ ಎಂಬುದು $(Z, +)$ನ ಉಪಸಂಕುಲ.

2. $(G, \times)$ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಮತ್ತು $a \in G$

$H = \{\ldots a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2 \ldots\ldots\}$ ಎಂಬುದು Gಯ ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $a \in G$ ಆದರೆ ಆವೃತ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ 'a'ಯ ಎಲ್ಲಾ (ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಘಾತಗಳು Gಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \quad H \subset G$$

ಈಗ, $\forall A, B \in H$ ಗೆ $AB^{-1} \in H$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರೆ H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲವಾಗುವುದು.

$A = a^r, B = a^s$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad AB^{-1} = a^r (a^s)^{-1}$$

$$= a^r \cdot a^{-s} = a^{r-s}$$

$$= a^k$$ (ಇಲ್ಲಿ $r - s = k$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ)

ಅಂದರೆ, $AB^{-1} = a^k \in H$

ಆದ್ದರಿಂದ, H ಎಂಬುದು Gಯ ಉಪಸಂಕುಲ.

3. $H = \{0, 2, 4\}_{\oplus \bmod 6}$ ಮತ್ತು $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}_{\oplus \bmod 6}$ ಆದರೆ Hಎಂಬುದು Gಯ ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$H \subset G$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈಗ

$$\forall a, b \in H \text{ ಗೆ } ab^{-1} \in H$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರೆ H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಪಗಣದಲ್ಲಿ, $\oplus \bmod 6$ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ

$(0)^{-1} = 0$, $(2)^{-1} = 4$ ಮತ್ತು $(4)^{-1} = 2$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಾದ $a, b \in H$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$a = 0, b = 2$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 0 + 4 = 4 \in H$

$a = 0, b = 4$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 0 + 2 = 2 \in H$

$a = 0, b = 0$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 0 + 0 = 0 \in H$

$a = 2, b = 0$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 2 + 0 = 2 \in H$

$a = 2, b = 2$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 2 + 4 = 0 \in H$

$a = 4, b = 0$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 4 + 0 = 4 \in H$

$a = 4, b = 2$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 4 + 4 = 2 \in H$

$a = 4, b = 4$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 4 + 2 = 0 \in H$

ಇಲ್ಲಿ, $a \oplus \bmod 6 b^{-1}$ ಯನ್ನು ab^{-1} ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad ab^{-1} \in H \ \forall a, b \in H$$

ಆದ್ದರಿಂದ, H ಎಂಬುದು Gಯ ಉಪಸಂಕುಲ.

3.6 ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು

(i) G ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ ಆದಾಗ Gಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

$\therefore \quad b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

$b^{-1}=x$ ಎಂದಿರಲಿ $a^{-1}=y$ ಎಂದಿರಲಿ

ಆಗ, $xy=yx$

ಆದುದರಿಂದ Gಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ.

(ii) G ಸಂಕುಲದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ ಆದರ ವಿಲೋಮವೇ ಆಗಿದ್ದರೆ Gಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$a, b\in G$ ಆಗಿರಲಿ

$\therefore \quad a=a^{-1}$ ಮತ್ತು $b=b^{-1}$

ಏಕೆಂದರೆ, Gಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವು ಆದರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $a, b\in G \Rightarrow ab\in G$

$\therefore \quad ab=(ab)^{-1} \qquad ...(1)$

ಆದರೆ $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$(ab)^{-1}=ba \qquad ...(2)$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ $ab=ba$

ಆದ್ದರಿಂದ G ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ.

(iii) G ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವರಲ್ಲಿ $a^{-1}=a$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಂಶ $a\neq e$ ಇರುತ್ತದೆ.

Gಯಲ್ಲಿ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಅಂಶವಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದು $2n$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇವರಲ್ಲಿ n ಅಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಉಳಿದ n ಇವುಗಳ ವಿಲೋಮ ಅಂಶಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ n ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ, $e^{-1}=e$ ಆದುದರಿಂದ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ $(2n-1)$ ಅಂಶಗಳಿವೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಆಗ Gಯಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಸವಾಯಿತು. ಆದುದರಿಂದ Gಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಇನ್ನೊಂದು ಅಂಶ $a\neq e$ ಇರಬೇಕು. ಅದು $a^{-1}=a$ ಎಂದಾಗಬೇಕು. ಆಗ Gಯಲ್ಲಿ ಅಂಶಗಳು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟಾಗುತ್ತವೆ.

(iv) $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $a*a=e,\ b*b=e,\ c*c=e$........ ಅಂದರೆ $a^2=e,\ b^2=e,\ c^2=e$........... ಆದರೆ Gಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $a\in G,\ b\in G. \quad \therefore\ ab\in G$

$\therefore \quad (ab)^2=e$

ಅಥವಾ $(ab)(ab)=e$

ಅಥವಾ $a(ba)b=e$

ಅಥವಾ $aa(ba)bb=aeb$

$a^2(ba)b^2=ab$

$\therefore \quad e(ba)e=ab$ (ಕಾರಣ $a^2=e,\ b^2=e$)

ಅಥವಾ $ba=ab$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(G, *)$ ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

(v) ಸಂಕುಲ $(G, *)$ ಯಲ್ಲಿ $(ab)^2=a^2b^2 \forall a, b\in G$ ಆದರೆ $(G, *)$ ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $(ab)^2=a^2b^2$

ಅಥವಾ $(ab)(ab)=(aa)(bb)$

$a(ba)b=a(ab)b$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $ba=ab$ ನಿರಸನ ನಿಯಮಗಳು

ಆದ್ದರಿಂದ, $(G, *)$ ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ

(vi) $(G, *)$ ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾದರೆ $(ab)^2=a^2b^2 \forall a, b\in G$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $(ab)^2=(ab)(ab)$

$=a(ba)b$

$=a(ab)b$

(ಕಾರಣ $(G, *)$ ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ: $ab=ba$)

$= (aa)(bb)$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಂದರೆ, $(ab)^2 = a^2b^2$

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ $a*b$ ಅನ್ನು ab ಎಂದು ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

(vii) $(G, *)$ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ 2 ಅಥವಾ 3 ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ ಅದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

1. Gಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಅಂಶ ಏಕದವಾಗಿರಬೇಕು.

$\therefore$ $G = \{a, e\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$*$	a	e
a	$a*a$	a
e	a	e

$a*a = a$ ಅಥವಾ e ಆಗಿರಬೇಕು.

$a*a = a$ ಆದರೆ $a = e$, ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$\therefore$ $a*a = e$ ಆಗಿರಬೇಕು

ಈಗ, ಕೋಷ್ಟಕವು ಈ ಮುಂದಿನ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ:

$*$	a	e
a	e	a
e	a	e

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅಂಶಗಳಿವೆ. ಇದರಿಂದ Gಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

2. Gಯಲ್ಲಿ 3 ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಅಂಶ e ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $G = \{e, a, b\}$ ಆಗಿರಲಿ, ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$a*a$	$a*b$
b	b	$b*a$	$b*b$

ಈಗ, $a*b \neq a$ ಏಕೆಂದರೆ $a*b = a$ ಆದರೆ ನಿರಸನ ನಿಯಮದಿಂದ $b = e$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಇದೇ ರೀತಿ, $a*b \neq b$.

$\therefore$ $a*b = e$

ಹಾಗೆಯೇ, $b*a = e$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $a^{-1} = b$ ಮತ್ತು $b^{-1} = a$

ಈಗ $a*a \neq e$, ಏಕೆಂದರೆ, $a*a=e$ ಆದರೆ $a^{-1}=a$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹಾಗೆಯೇ, $a*a=a$ ಆದರೆ $a=e$; ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$\therefore$ $a*a=b$ ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $b*b=a$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

ಇದರ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳಿರುವ ಕಾರಣ ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ.

   (i) Nನಲ್ಲಿ $a*b=a+5b$

   (ii) Zನಲ್ಲಿ $a*b=a+b+1$

   (iii) Nನಲ್ಲಿ $a*b=\dfrac{a+3b}{a-5b}$

   (iv) Rನಲ್ಲಿ $a*b=\dfrac{ab}{5}$

   (v) Rನಲ್ಲಿ $a*b=\sqrt{a^2+b^2}$

   (vi) Rನಲ್ಲಿ $a*b=\sqrt{a^2-b^2}$

   (vii) Cನಲ್ಲಿ $a*b=\sqrt{ab}$

2. (i) Rನಲ್ಲಿ $a*b=\dfrac{ab}{7}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಈ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ii) Rನಲ್ಲಿ $a*b=3a-5b+7ab$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೀಯವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(iii) Zನಲ್ಲಿ $a*b=a+b+5$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇದರ ಏಕದ ಮತ್ತು aಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) Zನಲ್ಲಿ $a*b=a+b+2$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ 4ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(v) ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಸಮೂಹ S_3ಯಲ್ಲಿ $S_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ ಆದರೆ S_1^{-1}ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(vi) $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ ಆದರೆ $f\cdot g$ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(vii) $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ ಆದರೆ $\alpha.\beta$ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(viii) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣ Zದ ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ *ನ್ನು $a*b=a+b+2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯಿಸಿದರೆ ಆದರ ಏಕದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ix) ಗುಣಾಕಾರ $(\mathrm{mod}\,10)$ರ ಸಂಕುಲ $G=\{1.3.7.9\}$ರಲ್ಲಿ 3ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(x) $G=\{1, -1, i, -i\}$ ಸಂಕುಲದ ಅನುಚಿತ ಉಪಸಂಕುಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

(xi) $G=\{3, 6, 9, 12\}$, ಇದು $(\mathrm{mod}\,15)$ರ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(xii) $G=(\{1, 5, 7, 11\})\times \mathrm{mod}\,12$, ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $5^{-1}+7^{-1}+11^{-1}$ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xiii) ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ * ಪರಿಕ್ರಿಯೆ $a*b=\frac{ab}{2}$ ಆದಾಗ ಅದರ ಏಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xiv) ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ $a*b=\frac{ab}{7}$ ಆದಾಗ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯು ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(xv) Qಗಣದ ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ * ಅನ್ನು $a*b=\frac{ab}{4}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯಿಸಿದರೆ ಏಕದವನ್ನು ಮತ್ತು 8ರ ಅನುಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xvi) $(G,*)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $a,\ b,\ c,\ d$ ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(a*b^{-1}*c^{-1}*d^{-1})=?$

(xvii) Gಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ (ಅಬಿಲಿಯನ್) ಸಂಕುಲವಾದರೆ $(a^{-1}b^{-1}c^{-1})^{-1}=?$

(xviii) $G=\{1,3,4,5,9\}\times_{\text{mod}11}$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ 5ರ ವಿಲೋಮವೇನು?

(xix) ಶೂನ್ಯರಹಿತ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $a*b=\frac{ab}{3}$ ಆಗಿದ್ದು $2*x*5=10$ ಆದರೆ xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xx) Z ಗಣದ ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ * ಅನ್ನು $a*b=a+b+5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯಿಸಿದರೆ ಏಕದವೇನು?

(xxi) $\{Z_6,+\text{mod}6\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ $2+4^{-1}+5^{-1}$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xxii) ಗುಣಾಕಾರ (mod5) ರ ಸಂಕುಲ $G=\{1,2,3,4\}$ನಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 4ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $G=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ ಆದಾಗ ಈ ಗುಣವು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

4. Gಯು ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

5. Gಯು ಎಲ್ಲಾ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

6. $Q-\{0\}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

7. $G=\{\ldots 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, 2^{2}\ldots\}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ದ್ವಿಮಾನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. $Z=\{a+ib \mid a,b\in R\}$ ಈ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. $G=\{a+b\sqrt{2},\ a,b\in Q\}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. ಎಲ್ಲಾ $m\times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗಣವು (ಮಾತೃಕೆಗಳ ಅಂಶಗಳು, ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆದಲ್ಲಿ) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $M=\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, x\in R \ \&\ x\neq 0$ ಆದರೆ, ಆಗ M ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $G=\{(\cos\theta+i\sin\theta) \mid \theta\in R\}$ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $Q-\{1\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ $a*b=a+b+ab$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇದು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $G=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ ಗಣವು ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

    (i) $G=\{0,1,2,3,4,5\}, \oplus \bmod 6$

    (ii) $G=\{1,2,3,4,5\}, \oplus \bmod 6$

    (iii) $G=\{1, 3, 4, 5, 9\}, \otimes \bmod 11$

(iv) $G = \{0, 3, 6, 9\}, \otimes \bmod 12$

(v) $G = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \otimes \bmod 9$

(vi) $G = \{1, 5, 7, 11\} \otimes \bmod 12$

(vii) $G = \{1, 2, 3, 4\} \otimes \bmod 5$

(viii) $G = \{1, 2, 3\} \otimes \bmod 4$

(ix) $G = (\{0\}, +)$

(x) $G = (\{1\}, \times)$

16. $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $a^2 = a$ ಆದರೆ $a = e$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. $(G, +)$ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ $-(-a) = a \forall a \in G$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. Gಯು ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು, H ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, H ಎಂಬುದು Gಯ ಉಪಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನವು ದ್ವಿಮಾನಕ್ರಿಯೆ.

19. $G = \{\ldots 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2 \ldots\}_\times$

$H = \{1, 2, 2^2, 2^3 \ldots\}_\times$ ಆದರೆ H ಎಂಬುದು Gಯ ಉಪಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

20. $G = \{1, -1, i, -i\}_\times$ ಸಂಕುಲದ ಉಪಸಂಕುಲಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

21. $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}_{+\bmod 6}$ ಸಂಕುಲದ ಉಪಸಂಕುಲಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ:

(i) $H_1 = \{0, 3\}$ (ii) $H_2 = \{0, 2, 5\}$

22. $G = \{3^n \mid n \text{ ಪೂರ್ಣಾಂಕ}\}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ (ಅಬಿಲಿಯನ್) ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

"ಭಾಸ್ಕರನ ಚಕ್ರವಾಳ ವಿಧಾನವು ಎಲ್ಲಾ ಶ್ಲಾಘನೆಗೂ ಮೀರಿದೆ.
ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಲಾಗ್ರಾಂಜ್‌ನಿಗಿಂತ ಮೊದಲುಗಳಿಸಿದ
ಸಾಧನೆಗಳ ಪೈಕಿ ಅತ್ಯಂತ ಶ್ರೇಷ್ಠವಾದುದು"

– ***ಹ್ಯಾಂಕೆಲ್,*** ಖ್ಯಾತ ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಜ್ಞ

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಸದಿಶಗಳು

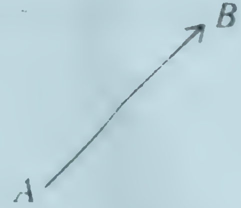
4.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವಾಹಕಗಳು ಅಥವಾ ಸದಿಶಗಳು ರೇಖಾಗಣಿತ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ ಮುಂತಾದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ.

ಸದಿಶಗಳಿಗೆ ದಿಕ್ಕು ಮತ್ತು ಪರಿಮಾಣ ಎರಡೂ ಇವೆ. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ನಿಯತ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಉದ್ದವು ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ದಿಕ್ಕನ್ನು ಬಾಣದ ತುದಿಯಿಂದ ತೋರಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 4.1).

Aಯು ಆದಿ ಬಿಂದು ಮತ್ತು Bಯು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಪರಿಮಾಣ $|AB| = |a| = AB$ ಯು ಉದ್ದ.



ಚಿತ್ರ 4.1

ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸದಿಶಗಳು

(i) **ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶ:** ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣವು 0 (ಸೊನ್ನೆ) ಆಗಿದ್ದರೆ ($|\dot{O}| = 0$) ಅದನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಬಿಂದು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು $\dot{O}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) **ಏಕ ಸದಿಶ:** ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣವು ಒಂದು ಆಗಿದ್ದರೆ ಇದನ್ನು ಏಕ ಸದಿಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $\vec{u}$ ಏಕ ಸದಿಶವಾಗಿದ್ದರೆ, $|\vec{u}|=1$, ಒಂದು ಸದಿಶ $\vec{a}$ ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ಇದರ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು $\hat{a}$ (a ಕ್ಯಾಪ್) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

(iii) **ಸಮ ಸದಿಶಗಳು:** ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಕ್ಕನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸದಿಶಗಳಿಗೆ ಸಮ ಸದಿಶಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iv) **ಸದಿಶದ ಋಣ ಸದಿಶ (ಅಥವಾ ವಿಮುಖ ಸದಿಶ):** ಒಂದು ದತ್ತ ಸದಿಶ $\vec{a}$ ಆದಾಗ, ಇದರಷ್ಟೇ ಪರಿಮಾಣ ಇರುವ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶವನ್ನು $\vec{a}$ಯು ಋಣ ಸದಿಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು $-\vec{a}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(v) **ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ:** ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು Pಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ $\overline{OP}$ ಸದಿಶವನ್ನು (O ಮೂಲಬಿಂದು) ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

4.2 (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ

$\hat{i}$ ಮತ್ತು $\hat{j}$ ಇವು ಎರಡು Ox ಮತ್ತು Oy ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\overrightarrow{OP}$ಯು Pಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 4.2).

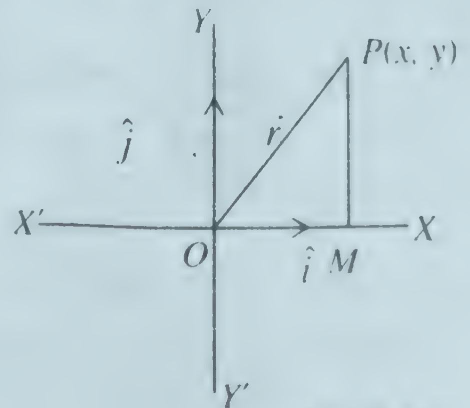
$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 4.2ರಲ್ಲಿ, PMನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

$$\therefore \quad OM = x$$

x-ಅಕ್ಷದ ದಿಕ್ಕಿಗೆ $\hat{i}$ಯು ಏಕ ಸದಿಶವಾದುದರಿಂದ

$$\overrightarrow{OM} = x\hat{i}$$



ಚಿತ್ರ 4.2

y-ಅಕ್ಷದ ದಿಕ್ಕಿಗೆ $\hat{j}$ಯು ಏಕ ಸದಿಶವಾದುದರಿಂದ

$$\overrightarrow{MP} = y\hat{j}$$

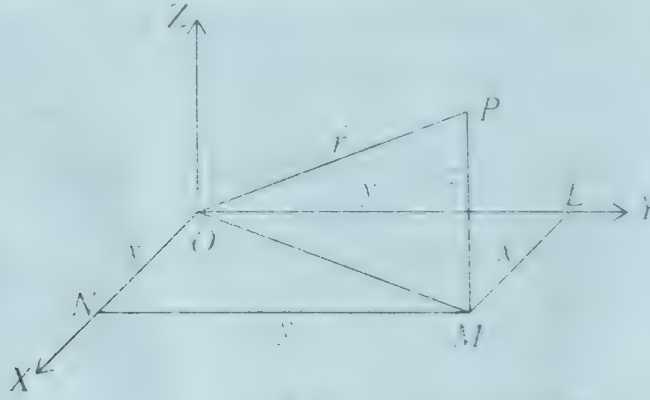
ಸದಿಶದ ಸಂಕಲನ ತ್ರಿಭುಜ ನಿಯಮದಿಂದ

ಈಗ, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$$\therefore \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$|\vec{r}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{OM^2 + MP^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $P(x, y)$ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ಇದನ್ನು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮ (x, y) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ x, yಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಆದುದರಿಂದ ಒಂದು ಸದಿಶವನ್ನು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 4.3

Pಯು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರುವಾಗ ಮೂರು-ಆಯಾಮಗಳ ವ್ಯೋಮದಲ್ಲಿ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ಈ ಮೂರು ಏಕ ಸದಿಶಗಳು OX, OY ಮತ್ತು OZ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. Ox, Oy ಮತ್ತು Oz ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 4.3ರಲ್ಲಿ PMನ್ನು XOY ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. MNನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು MLನ್ನು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $ON = ML = x$, $NM = OL = y$ ಮತ್ತು $MP = z$ ನಿಯೋಜಿತ ತ್ರಯ (x, y, z)ನಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Pಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಕ, y-ನಿರ್ದೇಶಕ ಮತ್ತು z-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

$\therefore \quad \overrightarrow{ON} = x\hat{i}, \ \overrightarrow{NM} = y\hat{j}$

$\therefore \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$ (OMN ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ)

$= x\hat{i} + y\hat{j}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$ (OMP ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ)

$\therefore \ \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

ಇದರ ಪರಿಮಾಣ, $|\overrightarrow{OP}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು (x, y, z) ಮತ್ತು ಇವರ ಪರಿಮಾಣ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

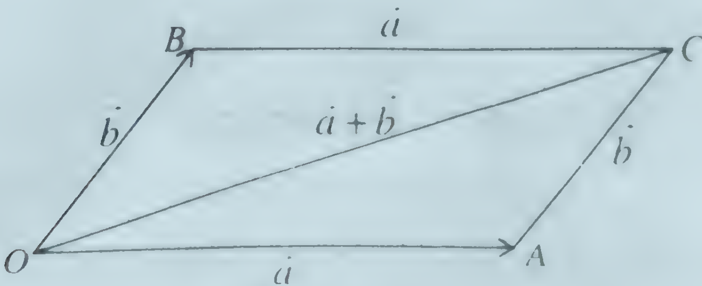
(i) **ಸದಿಶಗಳ ಸಂಕಲನ ಗುಣಗಳು:**

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ಆದರೆ

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \ a_2 + b_2, \ a_3 + b_3)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆಗಳು: $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.4)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. ಆಗ $\vec{a} + \vec{b}$ ಯು ಸದಿಶ $\overrightarrow{OC}$ ಆಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 4.4

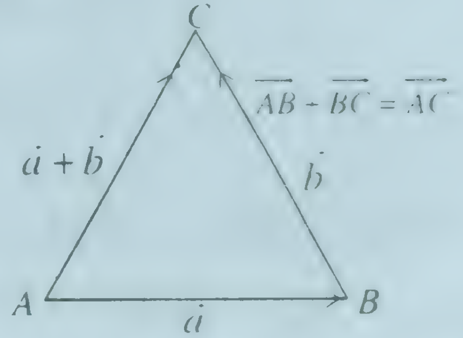
ಸದಿಶ ಸಂಕಲನದ ತ್ರಿಕೋಣ ನಿಯಮ:

ಚಿತ್ರ 4.5ರಲ್ಲಿ ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳಾದ $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{BC}$ ಗಳು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಎಂಬ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ $\overrightarrow{AC}$ಯು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ $\vec{a}+\vec{b}$ ಅನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸದಿಶಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಸದಿಶದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುವು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸದಿಶದ ಮೊದಲನೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$$



ಚಿತ್ರ 4.5

(ii) **ಸದಿಶಗಳ ವ್ಯವಕಲನ**

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ ಮತ್ತು $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

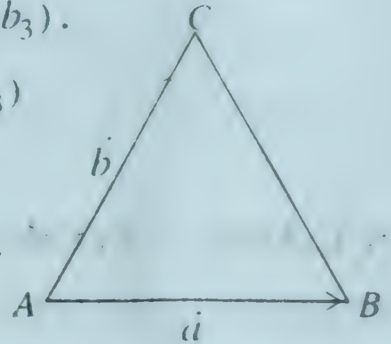
ಆಗ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ (ಚಿತ್ರ 4.6)

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ಆದಾಗ

ಅಂದರೆ, $\vec{a}=\vec{b}+\overrightarrow{CB}$

ಅಥವಾ $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{CB}$



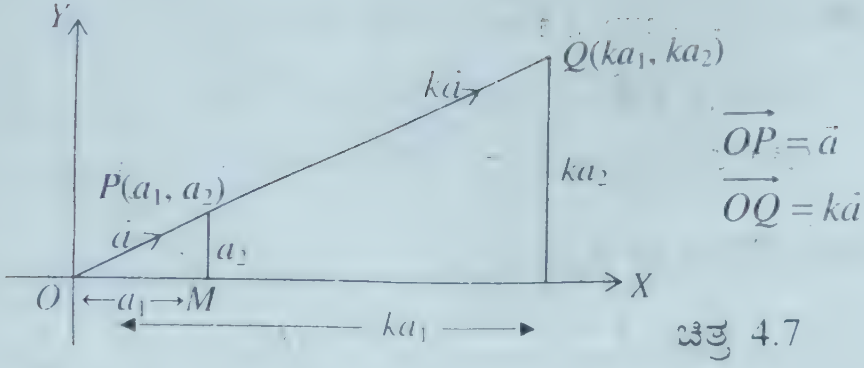
ಚಿತ್ರ 4.6

$\therefore$ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣ ABCಯಲ್ಲಿ

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{O}$$

(iii) **ಒಂದು ಅದಿಶದಿಂದ ಸದಿಶದ ಗುಣಾಕಾರ**

$\vec{a}=(a_1, a_2)$ ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿದ್ದು kಯು ಒಂದು ಅದಿಶವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $k\vec{a}=(ka_1, ka_2)$ ಸದಿಶವು $\vec{a}$ ಸದಿಶದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದ್ದು ಇದರ ಪರಿಮಾಣವು $\vec{a}$ಯ ಪರಿಮಾಣದ k ಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 4.7).



ಚಿತ್ರ 4.7

4.3 ವಿಭಜನ ಸೂತ್ರ

A ಮತ್ತು Bಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಆಗಿದ್ದರೆ P ಬಿಂದುವು $\overrightarrow{AB}$ಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ Pಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ (ಚಿತ್ರ 4.8). ಈಗ

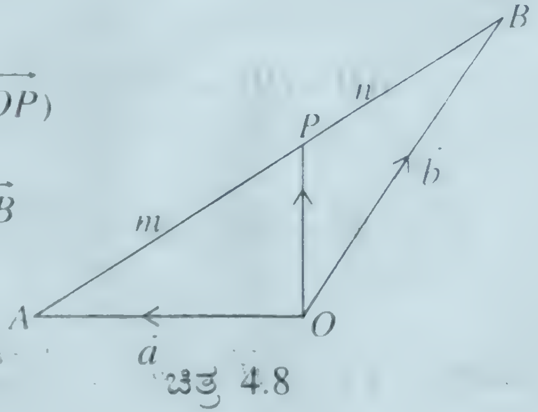
$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$$\therefore \; n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$$

ಅಥವಾ $n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$

ಅಥವಾ $(m+n)\overrightarrow{OP} = n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$



ಚಿತ್ರ 4.8

ಮಧ್ಯಬಿಂದು: $m = n = 1$ ಆದಲ್ಲಿ Pಯು $\overrightarrow{AB}$ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

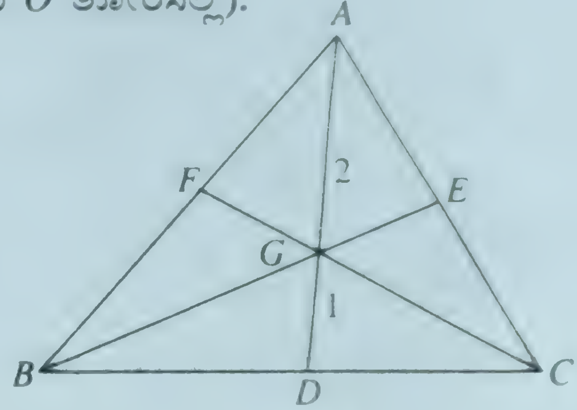
ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಶೃಂಗಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ (ಶೃಂಗದಿಂದ ಆರಂಭಗೊಂಡ) ಸದಿಶಗಳ ಮೊತ್ತ ಶೂನ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ABC ಎಂಬ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣ (ಚಿತ್ರ 4.9)ದಲ್ಲಿ

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ಆಗಿರಲಿ

(ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂಲಬಿಂದು O ತೋರಿಸಿಲ್ಲ).



ಚಿತ್ರ 4.9

Dಯು BCಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

$$\therefore \quad \overrightarrow{OD} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

Eಯು ACಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

$$\therefore \quad \overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

Fಯು ABಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\therefore \quad \overrightarrow{OF} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

ಈಗ, $\quad \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

$$\therefore \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}}{2}$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} - \vec{b} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}}{2}$$

ಮತ್ತು $\quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{c} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯರೇಖಾ ಸದಿಶಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{2} = \vec{0}$$

2. ಸದಿಶಗಳು $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AC} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ತ್ರಿಭುಜ ABCಯ ಭುಜಗಳಾದರೆ Aಯ ಮೂಲಕ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋಣ ABCಯಲ್ಲಿ Aಯನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ

Bಯು ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು Cಯು ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ $\overrightarrow{AC}$

ADಯು Aಯ ಮೂಲಕ ಮಧ್ಯರೇಖೆ ಆದರೆ

ಆಗ Dಯು BCಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

ಆದ ಕಾರಣ $\overrightarrow{AD}$ (Dಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ) $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$= \frac{1}{2}(3\hat{i} + 4\hat{k} + 5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$= 4\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \quad AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}$$

$$AD = \sqrt{33}$$

3. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\vec{a}$. $\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಗಳು ತ್ರಿಕೋಣದ ಶೃಂಗಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 4.9). ಆಗ

Dಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

Eಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$

Fಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

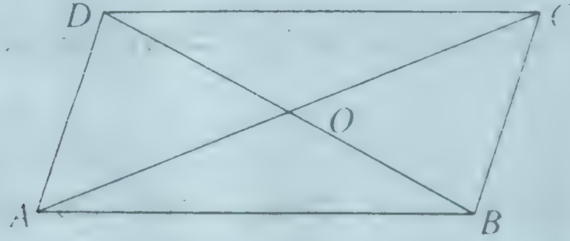
ಈಗ Aಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ $\vec{a}$ ಮತ್ತು Dಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

G ಬಿಂದುವು ADಯನ್ನು 2:1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ Gಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\dfrac{\dfrac{2(\vec{b}+\vec{c})}{2}+\vec{a}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

ಈಗ, Gಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶದ ಸಮಾಂಗತೆಯಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದು ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ, Gಯು BE ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ CF ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದುದರಿಂದ AD, BE ಮತ್ತು CF ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿರುವುವು. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು "ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ ಆಗಿದೆ.

4. ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ದ್ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಹಾಗೂ ಇದರ ವಿಲೋಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 4.10

(i) $ABCD$ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ (ಚಿತ್ರ 4.10). ನಾವು ACಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮತ್ತು BDಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಒಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$ABCD$ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$

ಅಥವಾ $\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$

ಅಥವಾ $\vec{b}+\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}$

$\therefore \quad \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

ಅಂದರೆ BDಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\equiv AC$ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು.

(ii) **ವಿಲೋಮ ಫಲಿತಾಂಶ**

ACಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\equiv BD$ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ

$ABCD$ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, AC ಮತ್ತು BDಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$$

ಅಥವಾ $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$

ಅಥವಾ $\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$

ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$

ಅಥವಾ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\quad \therefore \quad AB \parallel DC, \quad AB = DC$

ಹಾಗೆಯೇ, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

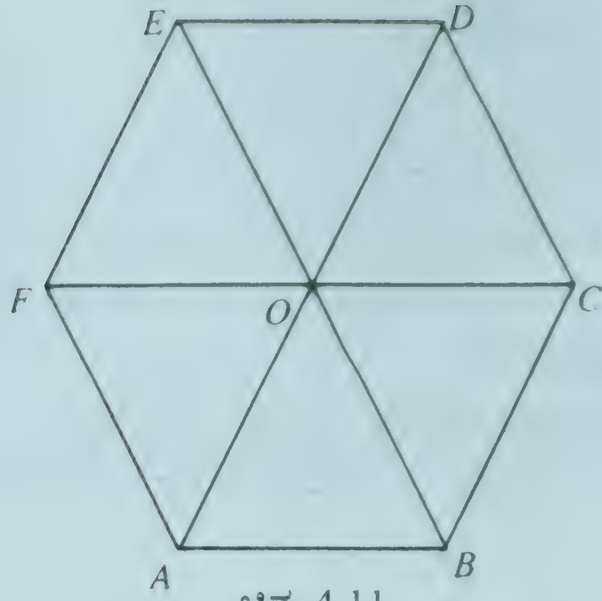
ಆದ್ದರಿಂದ, $ABCD$ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

5. $ABCDEF$ ಸಮಭುಜ ಷಟ್ಕೋನದಲ್ಲಿ

(i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$

(ii) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=4\overrightarrow{AB}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) **ಸಮಭುಜ ಷಟ್ಕೋನ $ABCDEF$ನಲ್ಲಿ**



ಚಿತ್ರ 4.11

AB ಮತ್ತು ED ಭುಜಗಳು
ಸಮ ಮತ್ತು ಸಮಾನಾಂತರ

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$

ಹಾಗೂ $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$

ಈಗ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

$$= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD}$$

$$= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$$ [∵ ತ್ರಿಕೋಣ ನಿಯಮದಿಂದ]

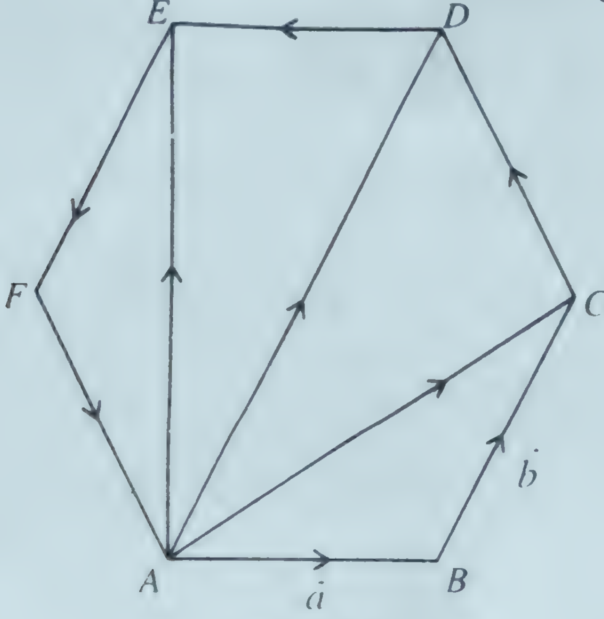
$$= 3\overrightarrow{AD}$$

(ii) $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$

$$= 2\overrightarrow{AB}$$ (ತ್ರಿಕೋಣ ನಿಯಮದಿಂದ)

$$\therefore \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}$$

6. $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು $ABCDEF$ ಸಮಭುಜ ಷಟ್ಕೋನದ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{CE}$ ಗಳನ್ನು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 4.12).



ಚಿತ್ರ 4.12

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ ...(1)

ಈಗ, $AD \parallel BC$ ಮತ್ತು $AD = 2BC$

$\therefore \quad \overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$ ...(2)

ಈಗ, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

ಅಂದರೆ, $2\vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CD}$ [(1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ]

ಅಥವಾ $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{CD}$ ...(3)

$FA \parallel DC$ ಮತ್ತು $FA = DC$

$\therefore \quad \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$ ಅಥವಾ $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD}$

$\therefore \quad \overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$ [(3)ರಿಂದ]

$DE \parallel BA$ ಮತ್ತು $DE = BA$

$\therefore \quad \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB}$ ಅಥವಾ $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$ ...(4)

ಈಗ, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \vec{b} - \vec{a} - \vec{a}$ [(3) ಮತ್ತು (4)ರಿಂದ]

$= \vec{b} - 2\vec{a}$

ಹಾಗೆಯೇ, $EF \parallel CB$ ಮತ್ತು $EF = CB$

$\therefore \quad \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$

$= 2\vec{b} - \vec{a}$ [(2) ಮತ್ತು (4)ರಿಂದ]

7. A, B, C, D ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{a} - 2\vec{b}$ ಗಳಾಗಿವೆ. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{CA}$ ಸದಿಶಗಳನ್ನು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈಗ O ಎಂಬುದು ಮೂಲಬಿಂದುವಾದರೆ, ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OD} = \vec{a} - 2\vec{b}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{a} = \vec{a} + 3\vec{b}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{b} - \vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b})$

ಮತ್ತು $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \vec{a} - 2\vec{a} - 3\vec{b} = -(\vec{a} + 3\vec{b})$

4.4 ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದು ಸದಿಶವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ: $\vec{a} = (1, 2, -3)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (2, -1, 4)$ ಆದರೆ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2(-1) + (-3)(4) = 2 - 2 - 12$$

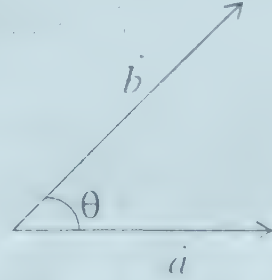
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$$

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಥ

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.13).

ಆಗ, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಯನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$



ಚಿತ್ರ 4.13

ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ:

(i) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಯು ಸದಿಶವಲ್ಲ.

(ii) θ ಕೋನವು ಲಘು ಅಥವಾ ಅಧಿಕವಾದಾಗ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

(iii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. ಅಂದರೆ, ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ

(iv) $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ಏಕೆಂದರೆ, $\cos 90^0 = 0$

(v) $\vec{a} \| \vec{b}$ ಆದಾಗ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

ಏಕೆಂದರೆ, $\cos 0^0 = 1$

(vi) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2$

(vii) ಏಕಸದಿಶಗಳಾದ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಹೀಗಿರುತ್ತವೆ:

$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}|^2 = 1 \qquad \hat{j}\cdot\hat{j} = 1$ ಮತ್ತು $\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = 0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

$$\hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{j} = 0$$

(viii) $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k}) + a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j}) + a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

$$= a_1b_1(1) + a_1b_2(0) + a_1b_3(0) + a_2b_1(0) + a_2b_2(1) + a_2b_3(0) + a_3b_1(0) + a_3b_2(0) + a_3b_3(1)$$

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum a_ib_i \quad i = 1, 2, 3$$

4.5 ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$$\vec{a}\times\vec{b} = \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:–

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2)$$

ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪರಿವರ್ತನೀಯುವಲ್ಲ. ಅಂದರೆ,

$\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$ ಏಕೆಂದರೆ

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ \vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$$

ಉದಾಹರಣೆ: $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$$\therefore\quad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(9+2) - j(12-2) + k(-4+3)$$

$$= 11\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

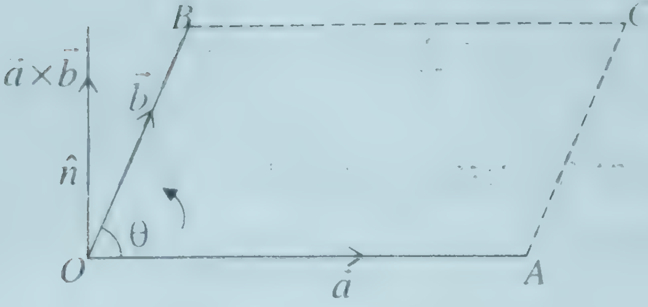
$$= \hat{i}(-2-9) - \hat{j}(2-12) + k(3+4)$$

$$= -11\hat{i} + 10\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$= -(11\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k})$$

$$\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b}) \quad \therefore \quad \vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$$

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಥ



ಚಿತ್ರ 4.14



ಚಿತ್ರ 4.15

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸದಿಶಗಳು ಹಾಗೂ θ ವು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಆಗಿರಲಿ. $\hat{n}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಏಕ ಸದಿಶ. ಇದು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ ಬಲ ತಿರುವು ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಆಗಿದೆ. ಆಗ $\vec{a}\times\vec{b}$ ಯನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯಿಸುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರಗಳು 4.14, 4.15):

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta \qquad (\text{ಏಕೆಂದರೆ } |\hat{n}|=1)$$

$$= OA\cdot OB\cdot\sin\theta$$

$= OACB$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ:

(i) $\vec{a}\times\vec{b}$ ಯು ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿದೆ.

(ii) $\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta(-\hat{n})$

$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

ಅಂದರೆ, $\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$

(iii) ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ. $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{b}\times\vec{a}|$.

(iv) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ಆದರೆ $\theta = 0$

$\therefore \sin\theta = 0 \qquad \therefore \vec{a} \times \vec{b} = 0$

(v) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(vi) $\vec{a} \perp \vec{b}$ ಆದಾಗ $\theta = 90^0$, $\sin\theta = 1$

$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = ab\hat{n}$

ಇಲ್ಲಿ $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

(vii) ಏಕ ಸದಿಶಗಳಾದ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ಗಳ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಹೀಗಿವೆ.

$\hat{i} \times \hat{i} = \vec{0} \qquad \hat{j} \times \hat{j} = \vec{0} \qquad \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$

$\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}| \sin 90^0 \; \hat{k}$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \; \hat{k}$

$\therefore \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \; \hat{j} \times \hat{j} = -\hat{k}$



ಚಿತ್ರ 4.16

ಹೀಗೆಯೇ, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \; \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ ಮತ್ತು $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

(ಚಿತ್ರ 4.16 ನೋಡಿ)

(viii) $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$= a_1\hat{i} \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_2\hat{j} \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$
$\quad + a_3\hat{k} \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$= a_1b_1(\hat{i} \times \hat{i}) + a_1b_2(\hat{i} \times \hat{j}) + a_1b_3(\hat{i} \times \hat{k})$
$\quad + a_2b_1(\hat{j} \times \hat{i}) + a_2b_2(\hat{j} \times \hat{j}) + a_2b_3(\hat{j} \times \hat{k})$
$\quad + a_3b_1(\hat{k} \times \hat{i}) + a_3b_2(\hat{k} \times \hat{j}) + a_3b_3(\hat{k} \times \hat{k})$

$= a_1b_1(\vec{0}) + a_1b_2(\hat{k}) + a_1b_3(-\hat{j})$
$\quad + a_2b_1(-\hat{k}) + \vec{0} + a_2b_3(\hat{i}) + a_3b_1(\hat{j}) + a_3b_2(-\hat{i}) + \vec{0}$

$= \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$

ಅಂದರೆ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

(ix) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ಮತ್ತು $\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ $\therefore\ \hat{n}=\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ಆದಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   (i) $\sin\theta$ (ii) $\cos\theta$

(i) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-5\hat{i}+5\hat{j}+5\hat{k}$

$\therefore\quad \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{25+25+25}=5\sqrt{3};$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14};\quad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6};$

$$\sin\theta=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{3}\sqrt{4}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

(ii) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})\cdot(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$=(1)(2)+(-2)(1)+(3)(1)$

$=2-2+3=3$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{7}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

2. $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 6 + 0 = 0$

$\therefore$ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

3. $\vec{a} = 2\hat{i} + m\hat{j} + 6\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = -3\hat{i} + 6\hat{j} + m\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ m ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ಅಂದರೆ, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 + 6m + 6m = 0$

ಅಥವಾ $12m - 6 = 0$

ಅಥವಾ $12m = 6$

ಅಥವಾ $m = \frac{1}{2}$

4. $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ಆದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\vec{a} \times \vec{b}$ (ii) $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸದಿಶ

(iii) $\sin\theta$

(i) ಈಗ, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(9 + 2) - \hat{j}(12 - 2) + \hat{k}(-4 - 3)$

$= 11\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}$

(ii) $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸದಿಶ, $\hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{11^2+(-10)^2+(-7)^2}$$
$$=\sqrt{121+100+49}=\sqrt{270}$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$$
$$\therefore \quad \hat{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{270}}(11\hat{i}-10\hat{j}-7\hat{k})$$

(iii) $$\sin\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}\sqrt{11}}$$

5. (i) ಯಾವಾಗ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ?

(ii) $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಏಕ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, $|\vec{a}+\vec{b}|$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ಏಕ ಸದಿಶಗಳಾದರೆ, ಆಗ

$|a^2+b^2|^2+|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{c}+\vec{a}|^2\leq 9$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad ...(1)$$

$\vec{a}$ ಯು $\vec{b}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

ಆಗ, (1) ರಿಂದ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

(ii) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})$
$$=1+1+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=2+2.1.1\cos\theta$$
$$=2(1+\cos\theta)$$

i.e. $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$\therefore \quad |\vec{a}+\vec{b}| = 2\cos\frac{\theta}{2}$

(iii) $2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$

$= |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 - (|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)$

$= |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 - 3$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2$

$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$

$= 1+1+1-2\left[|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3\right]$

$= 9-2|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 \leq 9$

6. A, B, C, D ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+3\hat{j}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{k}-\hat{j}$ ಆದರೆ $AB \parallel CD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, O ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ

$\overrightarrow{OA} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i}+3\hat{j}$

$\overrightarrow{OC} = 3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OD} = \hat{k}-\hat{j}$

ಈಗ, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC} = -3\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k} = -3(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

i.e. $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$ ಅಂದರೆ $\overrightarrow{CD}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AB}$ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ.

i.e. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

7. $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=|\vec{a}\times\vec{b}|$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}$$

$\therefore$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{8^2+8^2+8^2}$

$= \sqrt{8^2(1+1+1)} = 8\sqrt{3}$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

8. $\vec{a} = 3\hat{i}+4\hat{j}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = -5\hat{i}+7\hat{j}$ ಇವೆರಡು ಸದಿಶಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=\frac{1}{2}$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 41\hat{k}$$

ಅಥವಾ $|\vec{a}\times\vec{b}| = 41$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=\frac{41}{2}$ ಚ.ಮೂ.ಮಾ

9. $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ಇವು ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$ABCD$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ. 4.17)

$\overrightarrow{AC} = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{BD} = \hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ.

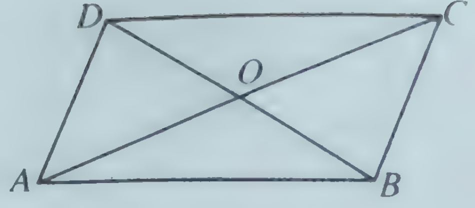
$ABCD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 4 \times \Delta^{le} COD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 4 \times \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD}$

$= 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \times \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}$



ಚಿತ್ರ. 4.17

ಈಗ, $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$

$\therefore$ $ABCD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 196 + 100}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{300} = 5\sqrt{3}$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

10. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಈ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳಿಗೂ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$

$\therefore \quad \hat{n} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \pm \frac{3\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}}{3\sqrt{3}} = \pm \frac{\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}}$

11. $\hat{a}$ ಮತ್ತು $\hat{b}$ ಎರಡು ಏಕ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದು θ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(\hat{a} - \hat{b}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\overrightarrow{OA} = \hat{a}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB} = \hat{b}$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \ \overrightarrow{BA} = \hat{a} - \hat{b}$

$$|\overrightarrow{BA}| = |BA| = |\hat{a} - \hat{b}|$$

$$(BA)^2 = (\hat{a} - \hat{b}) \cdot (\hat{a} - \hat{b})$$

$$= a^2 + b^2 - 2\hat{a} \cdot \hat{b}$$

$$= 1 + 1 - 2|\hat{a}||\hat{b}|\cos\theta$$

ಅಂದರೆ, $BA^2 = 2(1 - \cos\theta) = 2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\therefore \quad BA = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

ಅಥವಾ $\frac{1}{2}BA = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

12. $|\dot{a} + \dot{b}| = |\dot{a} - \dot{b}|$ ಆದರೆ $\dot{a}$ ಮತ್ತು $\dot{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $|\dot{a} + \dot{b}|^2 = |\dot{a} - \dot{b}|^2$

ಅಥವಾ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\dot{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

ಅಂದರೆ, $a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \dot{b} = a^2 + b^2 - 2\dot{a} \cdot \dot{b}$

ಅಥವಾ $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ಅಥವಾ $\vec{a} \cdot \dot{b} = 0$

$\therefore$ $\dot{a}$ ಮತ್ತು $\dot{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

4.6 ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ (ಸ್ಕೇಲಾರ್ ಟ್ರಿಪಲ್ ಪ್ರಾಡಕ್ಟ್)

$\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\dot{a} \cdot (\dot{b} \times \dot{c})$ ಅನ್ನು ಆ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $[\dot{a}\ \dot{b}\ \dot{c}]$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು "ಬಾಕ್ಸ್ ಪ್ರಾಡಕ್ಟ್" ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

$$\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$$

ಆದಾಗ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಯೋಣ.

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(b_2c_3 - b_3c_2) - \hat{j}(b_1c_3 - b_3c_1) + \hat{k}(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$\therefore \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

$$= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot[\hat{i}(b_2c_3 - b_3c_2) - \hat{j}(b_1c_3 - b_3c_1) + \hat{k}(b_1c_2 - b_2c_1)]$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ:

(i) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ಯು ಸದಿಶವಲ್ಲ; ಇದೊಂದು ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ.

(ii) ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಈ ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

ಅಥವಾ $\qquad [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = [\vec{b}\vec{c}\vec{a}] = [\vec{c}\vec{a}\vec{b}]$

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ

$$=-\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ

$$=+\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

ಹೀಗೆಯೇ $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

ಅಥವಾ $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]=[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$

(iii) 3 ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು

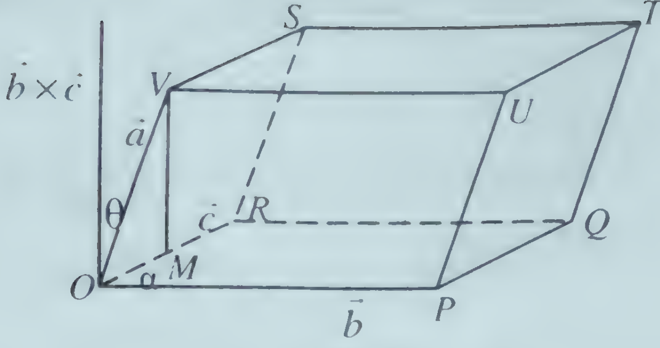
ಉದಾಹರಣೆ: $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{b}]=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{b}]$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$$

(ಎರಡು ಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುವು).

(iv) **ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥ**

$\vec{a},\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ (ಆರು) ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ (ಪ್ಯಾರಲಲೋಪೈಪೆಡ್), ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಡುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ಯು ಇದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 4.18

ಚಿತ್ರ 4.18ರಲ್ಲಿ $OPQRSTUV$ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ (ಆರು) ಮುಖಿಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳು $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಯಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ

$OP = b,\ OR = c$ ಮತ್ತು $OV = a$.

$\vec{b}\times\vec{c}$ ಯು $OPQR$ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

$\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ α ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $P\hat{O}R = \alpha$

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}\times\vec{c}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಎಂದಿರಲಿ.

VM ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಮತಲ $OPQR$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta$$

$$= (OV\cos\theta)|\vec{b}||\vec{c}|\sin\alpha$$

$$= (VM)[(OP)(OR)\sin\alpha]$$

$=$ (ಘನಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ)($OPQR$ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

ಏಕೆಂದರೆ, $\cos\theta = \dfrac{VM}{OV}$

$VM = OV\cos\theta$ = ಎತ್ತರ.

$\therefore\ \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = OPQRSTUV$ ಯ ಘನಫಲ.

ಇಲ್ಲಿ, $OPQRSTUV$ ಯು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಖಿಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(v) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ ಘನಫಲ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ 3 ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು.

ಸೂಚನೆ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ ಅಥವಾ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ಈ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ,

ಅಂದರೆ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}] = 0$ ಅಥವಾ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$ ಆಗ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಾದ A, B, C, D ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ

4.7 ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ (ವೆಕ್ಟರ್ ಟ್ರಿಪಲ್ ಪ್ರಾಡಕ್ಟ್)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು 3 ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ಆ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ "ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಸದಿಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

ಸಾಧನೆ: $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

ಮತ್ತು $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}(b_2c_3 - b_3c_2) - \hat{j}(b_1c_3 - b_3c_1) + \hat{k}(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\therefore \quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$

$$= \sum \left[a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\right]\hat{i}$$

$$= \sum \left[a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3\right]\hat{i}$$

[$a_1b_1c_1$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಕಳೆದಾಗ]

$$= \sum \left[a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)\right]\hat{i}$$

$$= \sum \left[(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1\right]\hat{i}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\sum \left[b_1\hat{i} - (\vec{a}\cdot\vec{b})c_1\hat{i}\right]$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ಯು ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿದೆ.

(ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ:

ಏಕೆಂದರೆ, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$$= -[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]$$

$$= (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

$$\neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$\therefore \quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ಮತ್ತು $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=3+2+4=9$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=6-1-2=3$$

$$\therefore \quad (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}=9(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=18\hat{i}+9\hat{j}-9\hat{k}$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=3(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})=3\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}$$

$$\therefore \quad (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=15\hat{i}+15\hat{j}-15\hat{k}=15(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

ಹಾಗೆಯೇ, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=9; \quad \vec{b}\cdot\vec{c}=2-2-2=-2$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}=9(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=(18\hat{i}+9\hat{j}-9\hat{k})$$

$$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}=-2(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=-6\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$$

$$\therefore \quad (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}=24\hat{i}+7\hat{j}-5\hat{k}$$

2. $\left[\vec{a}\times\vec{b} \quad \vec{b}\times\vec{c} \quad \vec{c}\times\vec{a}\right]=[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\text{LHS} \equiv (\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})]$$

$\vec{p}=\vec{b}\times\vec{c}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \text{ LHS } =(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\{\vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{a})\}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\{(\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{p}\cdot\vec{c})\vec{a}\}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\{(\vec{a}\cdot\vec{p})\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{p})\vec{a}\}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\left[\{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\}\vec{c}-\{\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\}\vec{a}\right]$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\left\{\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\vec{c}-\left[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\vec{a}\right\}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\left\{\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\vec{c}-(0)\ \vec{a}\right\}$$

$$=\left\{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right\}\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$$

$$=\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] \quad =\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]^2$$

3. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ ಆದರೆ $\vec{b}=\vec{0}$ ಅಥವಾ $\vec{c}\parallel\vec{a}$.

ಈಗ, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

ಅಥವಾ $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

ಅಥವಾ $(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}=\vec{0}$

ಅಂದರೆ, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{0}$

$\therefore\ \vec{b}=\vec{0}$ ಅಥವಾ $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$

ಅಂದರೆ, $\vec{b}=\vec{0}$ ಅಥವಾ $\vec{c}\parallel\vec{a}$

4. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳು $2\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$, $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, $4\hat{i}+2\hat{j}+10\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಘನಫಲ} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 2(20-2)-1(30-4)+5(6-8)=0$$

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ

$\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+1\hat{j}+5\hat{k}$,

ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಾದ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರಬೇಕಾದರೆ

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} &= 1(20-2)-1(15-6)+1(3-12) \\ &= 18-9-9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

6. $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$, $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, ಮತ್ತು $\lambda\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಾದ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ,

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ಅಂದರೆ, $2(2-1)+3(4+\lambda)+4(-2-\lambda)=0$

ಅಥವಾ $2+12+3\lambda-8-4\lambda=0$

ಅಥವಾ $\lambda=6$

7. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$A(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$ $\quad$ $B(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$

$C(3\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k})$ $\quad$ $D(\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k})$

ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಸದಿಶಗಳಾದ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AD}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, $\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right]=0$

ಈಗ, $\overrightarrow{AB}=-\hat{i}-5\hat{j}+4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\overrightarrow{AD}=-\hat{i}-9\hat{j}+7\hat{k}$

$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -1(7-9) + 5(7-1) + 4(-9+1)$$

$$= 2 + 30 - 32 = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ A, B, C, D, ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

8. $\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$, $4\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$, $5\hat{i} + \hat{j} + 14\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}$ ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ λ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C, D ಆಗಿರಲಿ

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}) - (\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k})$$

$$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + (9-\lambda)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (5\hat{i} + \hat{j} + 14\hat{k}) - (4\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k})$$

$$= \hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}) - (5\hat{i} + \hat{j} + 14\hat{k})$$

$$= -2\hat{i} + \hat{j} - 7\hat{k}$$

A, B, C, D ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಅಥವಾ

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ ಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ

ಅಂದರೆ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right] = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9-\lambda \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(7-5) - 3(-7+10) + (9-\lambda)(1-2) = 0$$

$$\Rightarrow 6 - 9 - 9 + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 12$$

9. $\left[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}\right]=2\left[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}\right]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $(\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left\{(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})\right\}$

$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left\{\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right\}$

$=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$

$+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ $[\because \ \vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}]$

$=\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]+\left[\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]+\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}\right]+\left[\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{a}\right]+\left[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{a}\right]+\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right]$

$=\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]+\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right]$ (ಏಕೆಂದರೆ ಉಳಿದ ಪದಗಳು = 0)

$=\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]-\left[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}\right]$

$=\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]+\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

$=2\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

10. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

LHS $\equiv(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}+(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

$+(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

$=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

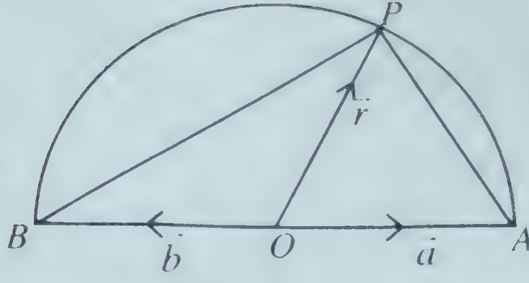
$+(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$

$=0=$ RHS

11. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

Pಯು ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ABಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿದ್ದು O ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.19).

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ ಎಂದಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 4.19

ಈಗ, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \vec{a}$

ಮತ್ತು $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \vec{r} - \vec{b}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} - \vec{b})$

$= \vec{r} \cdot \vec{r} - \vec{r} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{r} + \vec{a} \cdot \vec{b}$

$= |\vec{r}|^2 + \vec{r} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{r} - \vec{a} \cdot \vec{a}$ (ಏಕೆಂದರೆ $-\vec{b} = \vec{a}$)

$= |\vec{r}|^2 - |\vec{a}|^2$

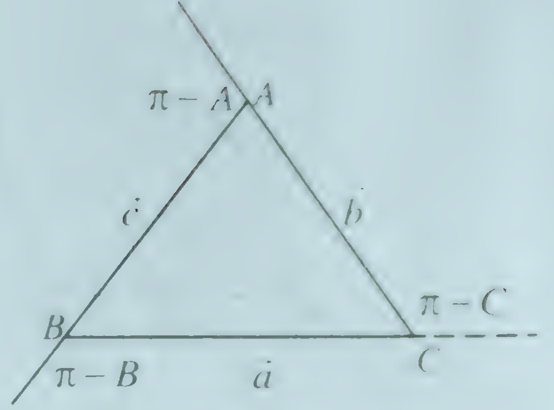
$\therefore \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ (ಏಕೆಂದರೆ $r = a$, ತ್ರಿಜ್ಯ)

ಅಂದರೆ, AP ಮತ್ತು BPಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಅಥವಾ $\angle APB = 90^0$.

12. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ "ಸೈನ್ ನಿಯಮ"ವನ್ನು ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜ ABCಯಲ್ಲಿ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ ಎಂದಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.20). ಆಗ, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \; \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{0}$



ಚಿತ್ರ 4.20

ಅಂದರೆ $\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$

ಅಥವಾ $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$

(ಏಕೆಂದರೆ $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$)

ಅಥವಾ $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{c}$

ಅಥವಾ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$ ...(1)

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\times\vec{0}$

ಅಥವಾ $\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}$

ಅಥವಾ $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ...(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{c}\times\vec{a}|$$

ಅಥವಾ $ab\sin(\pi-C)=bc\sin(\pi-A)=ca\sin(\pi-B)$

ಅಥವಾ $ab\sin C=bc\sin A=ca\sin B$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು abc ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$$

ಅಥವಾ $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

13. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

ಅಥವಾ $\overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$\therefore \quad |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ (ಚಿತ್ರ 4.20)

ಅಂದರೆ, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - A)$

ಅಥವಾ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

14. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ ನಿಯಮವನ್ನು (ಪ್ರೊಜೆಕ್ಷನ್ ರೂಲ್) ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು $\Delta^{le} ABC$ ಯಲ್ಲಿ $a = b\cos C + c\cos B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $\vec{a} = -(\vec{b} + \vec{c})$

$\therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

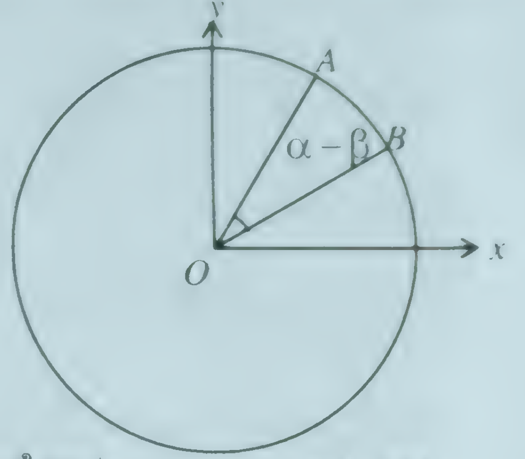
$\therefore \quad |\vec{a}|^2 = -\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$

$|\vec{a}|^2 = -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - c) - |\vec{a}||\vec{c}|\cos(\pi - B)$

ಅಂದರೆ, $a^2 = ab\cos C + ac\cos B$

15. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\sin(\alpha \pm \beta)$ ಮತ್ತು $\cos(\alpha \pm \beta)$ ಗಳಿಗೆ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin(\alpha-\beta)$ ಮತ್ತು $\cos(\alpha-\beta)$ಗಳ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಎರಡು ಏಕ ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $(\alpha-\beta)$ ಆಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 4.21).



ಚಿತ್ರ 4.21

ಏಕಮಾನ ವೃತ್ತವನ್ನು ಅಂದರೆ $x^2+y^2=1$ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. Aಯು $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ಮತ್ತು Bಯು $(\cos\beta, \sin\beta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $(\alpha-\beta)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು

$$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha)\hat{i}+(\sin\alpha)\hat{j};$$

$$\overrightarrow{OB}=(\cos\beta)\hat{i}+(\sin\beta)\hat{j}$$

ಈಗ, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$

ಅಂದರೆ, $(\cos\alpha)\cdot(\cos\beta)+(\sin\alpha)(\sin\beta)=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ಹಾಗೆಯೇ $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta\cdot\hat{n}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & \sin\beta & 0\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot\sin(\alpha-\beta)(-\hat{k})$$

$$\Rightarrow (\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)\hat{k}=-\sin(\alpha-\beta)\cdot\hat{k}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta=-\sin(\alpha-\beta)$$

ಅಥವಾ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\cos(\alpha+\beta)$ ಮತ್ತು $\sin(\alpha+\beta)$ ಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. Aಯು $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ಮತ್ತು Bಯು $(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ ಆಗಿರಲಿ ಆಗ $\overrightarrow{OA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $(\alpha+\beta)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4

1. ಸದಿಶ ಮತ್ತು ಅದಿಶಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.
2. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 4)$, $\vec{c} = (2, 1, -3)$ ಆದರೆ $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. Pಯು ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು Qನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\overrightarrow{QP}$ ಸದಿಶವನ್ನು ಮತ್ತು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. A, B, C, D ಗಳ ಸ್ಥಾನಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{a} - 2\vec{b}$ ಆಗಿವೆ. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ ಸದಿಶಗಳನ್ನು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಸಿರಿ.
6. P, Q, R ಮತ್ತು Sಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ $PQ \parallel RS$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇವೆರಡರ ಉದ್ದಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. xy-ಸಮತಲದಲ್ಲಿ $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, 5)$, ಮತ್ತು $(l - m + 5)\vec{a} + (2m + 2)\vec{b} = (0, 0)$ ಆಗಿದ್ದರೆ l ಮತ್ತು mಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. $(x - 2y + 3)\hat{i} + (3x + 1)\hat{j}$ ಯು ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವಾದರೆ x ಮತ್ತು yಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ, $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ ನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $A, B, C,$ ಮತ್ತು Dನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $7\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$, $\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k}$, $-\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $5\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಚತುರ್ಭುಜದ $ABCD$ಯು ಆಯತ, ವರ್ಗ, ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

12. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಸದಿಶಗಳ ಉದ್ದವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3, 4, 5 ಆದರೆ ಮತ್ತು $\vec{a}$ ಯು $(\vec{b} + \vec{c})$ಗೆ, $\vec{b}$ ಯು $(\vec{c} + \vec{a})$ಗೆ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಯು $(\vec{a} + \vec{b})$ಗೆ ಲಂಬವಾದರೆ ಆಗ $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ ಸದಿಶದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{j} - \hat{k}$ ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆಗಿದ್ದರೆ $\cos\theta$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $\vec{a} = (-2, 1, 4)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$ ಆದರೆ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} + \vec{b}$ ಯು $\vec{a} - \vec{b}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳಾದ ಬಿಂದುಗಳು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳು $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. $\vec{a} = 9\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 9\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} \times \vec{b}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $\vec{a} = (1, 2, -1)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (2, -1, 1)$ ಆದರೆ $\vec{a} \times \vec{b}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆಗಿದ್ದರೆ $\sin\theta$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{c} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} \times \vec{b} = 7\vec{c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

23. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಸದಿಶ ಗಣಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

    (i) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$, $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

    (ii) $\hat{i} + \hat{j}$, $\hat{j} + \hat{k}$, $\hat{k} + \hat{i}$

    (iii) $\hat{i} - \hat{j}$, $\hat{j} - \hat{k}$, $\hat{k} - \hat{i}$

    (iv) $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

24. $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ಆದರೆ $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

25. ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು $\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ಆದಾಗ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

26. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳು $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

27. ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ $A(1, 1, 2)$, $B(2, -1, 1)$ ಮತ್ತು $C(3, 2, 1)$ ತ್ರಿಭುಜ ABCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

28. $\vec{a} = \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ಇವು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

29. $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$, $-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ ಮತ್ತು $4\vec{a}-7\vec{b}+7\vec{c}$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

30. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

(ii) $\vec{a}=(1,-1,1)$, $\vec{b}=(2,-4,5)$, $\vec{c}=(3,-5,1)$

(iii) $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{c}=4\hat{k}$

31. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸದಿಶಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$

(ii) $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$

(iii) (1, 1, 1), (3, 4, 2) ಮತ್ತು (3, 1, 5)

32. $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i}+P\hat{j}+5\hat{k}$ ಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ Pಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

33. ಈ ಕೆಳಗಿನ 4 ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $-2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, $6\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$

34. $[\vec{a}-\vec{b}\ \ \vec{b}-\vec{c}\ \ \vec{c}-\vec{a}]=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

35. $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

36. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

$\vec{b}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{c}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

ಆಗಿದ್ದರೆ, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}\times\vec{c}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

37. $\vec{a}\times\{\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\}=(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\times\vec{a})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

38. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, mನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $m\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

(ii) $2\hat{i} - 3\hat{j} + m\hat{k}$, $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $6\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

(iii) $\hat{i} - 2\hat{j} + m\hat{k}$, $4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $11\hat{i} + 7\hat{k}$

(iv) $4\hat{i} + 11\hat{j} + m\hat{k}$, $7\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$, ಮತ್ತು $\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$

(v) $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $3\hat{i} + m\hat{j} + 5\hat{k}$

39. $\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

40. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ಒಂದು ಏಕ ಸದಿಶವೆಂದು ಮತ್ತು $(\sin\alpha, \cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta)$ ಏಕ ಸದಿಶವಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

41. $3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $18\hat{i} - 12\hat{j} + m\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾದರೆ mನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

42. $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

43. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ತ್ರಿಭುಜ ABCಯ ಶೃಂಗಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

44. $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳಿಗೆ ಸಮತಲವಾಗಿ $\vec{c}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

"ಪ್ರಚಂಡನಾದ ಸೂರ್ಯನು ತನ್ನ ಪ್ರಜ್ವಲಿಸುವ ಬೆಳಕಿನಿಂದ ನಕ್ಷತ್ರಗಳನ್ನು ಮರೆಮಾಚುವಂತೆ ಒಬ್ಬ ಮಹಾಜ್ಞಾನಿಯು ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದರಿಂದ – ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ – ಸಭೆಗಳಲ್ಲಿ ಇತರರ ಖ್ಯಾತಿಯನ್ನು ಕಾಂತಿಹೀನಗೊಳಿಸುತ್ತಾನೆ"

– ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ವೃತ್ತಗಳು

5.1.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ದತ್ತಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು ವೃತ್ತವೆನಿಸುವುದು.

5.1.2 ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

(i) ಮೂಲ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರ

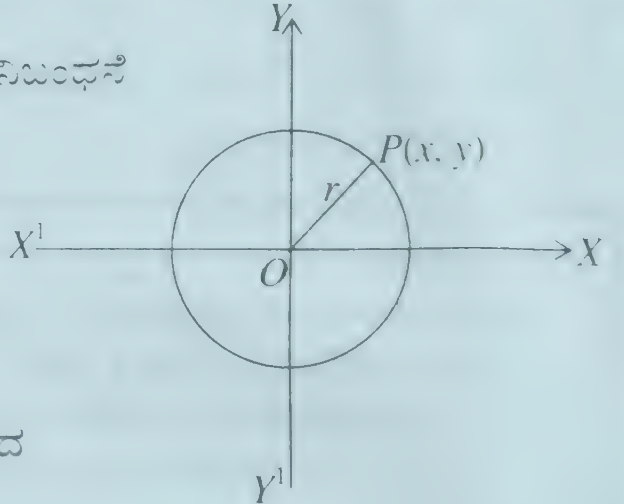
$O(0, 0)$ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, r ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. $P(x, y)$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ.

P ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಪಥದ ನಿಬಂಧನೆ $OP = r$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $OP^2 = r^2$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 = r^2$

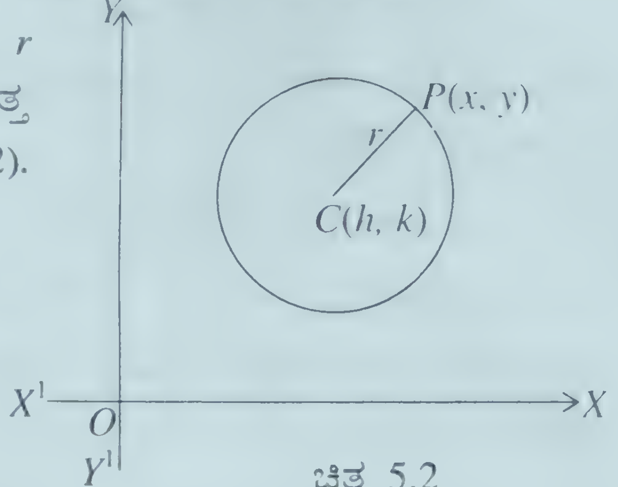
ಇದು, ಮೂಲಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.



ಚಿತ್ರ 5.1

(ii) $C(h, k)$ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, r ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

$C(h, k)$ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, r ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 5.2).



ಚಿತ್ರ 5.2

$P(x, y)$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.
ಬಿಂದು ಪಥದ ನಿಬಂಧನೆ:

$$CP = r$$

ಅಥವಾ $CP^2 = r^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $\mathbf{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$.

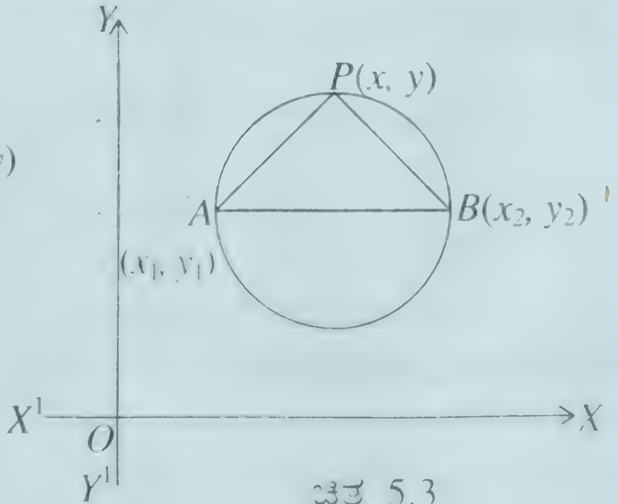
ಇದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

5.1.3 (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2)ಗಳು ವ್ಯಾಸವೊಂದರ ತುದಿಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

AB ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳು (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರ 5.3ರ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ,

$$A\hat{P}B = 90^0$$

(ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನ)



ಚಿತ್ರ 5.3

ಆದ್ದರಿಂದ,

(APಯ ಓಟ) (PB ಯ ಓಟ) = -1

ಅಂದರೆ, $\left(\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\dfrac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$

ಅಥವಾ $\mathbf{(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0}$

ಇದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

5.1.4 ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots(1)$$

ಎಂಬ ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ಅನ್ನು

$$(x^2 + 2gx) + (y^2 + 2fy) = -c$$

ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. x ಮತ್ತು yಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಗಳಿಗೆ $g^2 + f^2$ ಅನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ,

$$(x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = -c + g^2 + f^2$$

ಅಥವಾ $(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$

ಇದನ್ನು $[x-(-g)]^2 + [y-(-f)]^2 = \left[\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right]^2$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $(-g, -f)$ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವನ್ನು ಮತ್ತು $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಇದರ ಗುಣವಿಶೇಷಣಗಳು:

1. ಈ ಸಮೀಕರಣವು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ. ಇದರಲ್ಲಿ x^2 ಮತ್ತು y^2ಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಐಕ್ಯಘಾತುವಾಗಿರುವುವು.
2. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $g = 0$ ಆದಾಗ, $x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣವು y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $(0, -f)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

3. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $f = 0$ ಆದಾಗ, $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣವು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $(-g, 0)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

4. ಅದೇ ರೀತಿ $c = 0$ ಆದಾಗ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$, ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

5. $g^2 + f^2 - c$ ಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ನೈಜವೃತ್ತವೆಂದೂ, ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಊಹ್ಯವೃತ್ತವೆಂದೂ, ಶೂನ್ಯವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ **ಬಿಂದು ವೃತ್ತ**ವೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

6. ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸುವಾಗ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x^2 ಮತ್ತು y^2ಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಐಕ್ಯಧಾತುಗಳಾಗಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (2, 3) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ 6 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ,

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (6)^2$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

2. $2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y - 2 = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y - 1 = 0$$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಆಗ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು. $(-g, -f) \equiv \left(\frac{-5}{4}, \frac{-3}{4}\right)$

ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ = $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \left(\frac{25}{16} + \frac{9}{16} + 1\right)^{1/2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

3. (4, 2) ಮತ್ತು (−3, −5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳಾಗಿವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

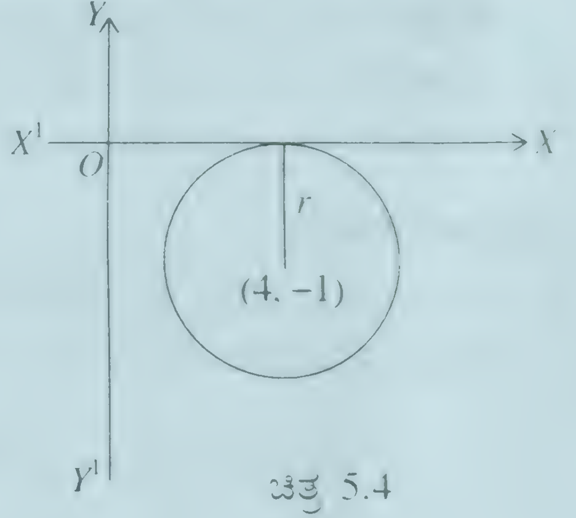
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

$$(x-4)(x+3)+(y-2)(y+5)=0$$

ಅಥವಾ $x^2+y^2-x+3y-22=0$ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

4. (4, −1) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.4

ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು (4, −1) ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $|f|$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $r = 1$ (ಚಿತ್ರ 5.4)

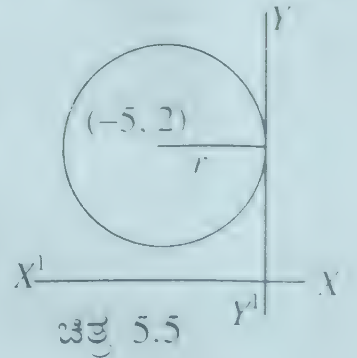
ಆಗ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x-4)^2+(y+1)^2=(1)^2$$

ಅಥವಾ

$$x^2+y^2-8x+2y+16=0$$

5. (−5, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ, y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.5

ವೃತ್ತವು y −ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $|g|$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $r = 5$

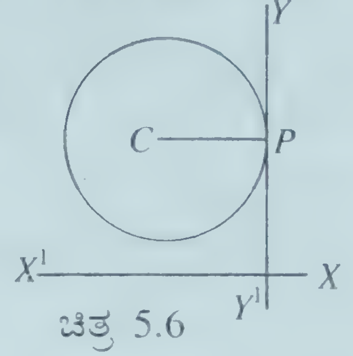
ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x+5)^2+(y-2)^2=(5)^2$$

ಅಥವಾ $x^2+y^2+10x-4y+4=0$

6. (2,−3) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $3x - 4y - 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ CPಯು ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.6

ಆದ್ದರಿಂದ

$$r = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{3(2) - 4(-3) - 8}{\sqrt{9+16}} = 2$$

ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

7. (2, 0), (3, 0) ಮತ್ತು (0, 3) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಗಣಿಸೋಣ.

ಈಗ (2, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$4 + 0 + 4g + c = 0 \Rightarrow 4g + c = -4$$

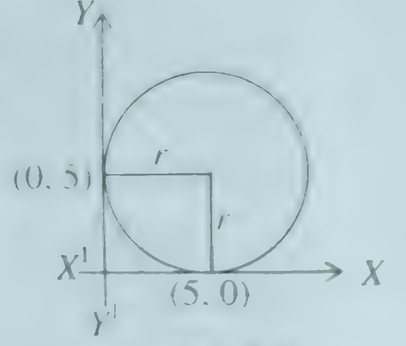
ಅದೇ ರೀತಿ (3, 0) ಮತ್ತು (0, 3) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$9 + 0 + 6g + c = 0 \Rightarrow 6g + c = -9$$

$$0 + 9 + 6f + c = 0 \Rightarrow 6f + c = -9$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ $g = \frac{-5}{2}, c = 6$ ಮತ್ತು $f = \frac{-5}{2}$ ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 6 = 0$

8. ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು (5, 0) ಮತ್ತು (0, 5) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.7

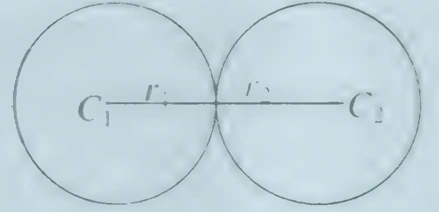
ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ $r = |g| = |f|$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು (5, 5) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 5.7).
ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

9. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$



ಚಿತ್ರ 5.8

ಸೂಚನೆ: ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಇರುವ ನಿಬಂಧನೆ $C_1C_2 = r_1 + r_2$ (ಚಿತ್ರ. 5.8)

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು:

$$C_1 \equiv (-1, -2), \quad r_1 = \sqrt{1+4-1} = 2$$

$$C_2 \equiv (2, 2), \quad r_2 = \sqrt{4+4+1} = 3$$

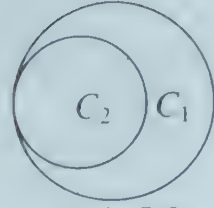
ಮತ್ತು $C_1C_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$$\therefore C_1C_2 = r_1 + r_2$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತವೃತ್ತಗಳು **ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ** ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

10. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು **ಆಂತರಿಕವಾಗಿ** ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ

(i) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 15 = 0$



ಚಿತ್ರ 5.9

ಸೂಚನೆ: ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಇರುವ ನಿಬಂಧನೆ $C_1C_2 = r_1 - r_2$ ಅಥವಾ $r_2 - r_1$ (ಚಿತ್ರ 5.9).

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು,

$$C_1 = (1,-3), \quad r_1 = \sqrt{1+9-6} = 2$$

$$C_2 = \left(5/2, -3\right), \quad r_2 = \sqrt{\frac{25}{4} + 9 - 15} = \frac{1}{2}$$

ಮತ್ತು $C_1C_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + (-3+3)^2} = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad C_1C_2 = r_1 - r_2$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತವೃತ್ತಗಳು **ಆಂತರಿಕವಾಗಿ** ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

11. (5, 0) ಮತ್ತು (1, 4) ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವು $x + y - 3 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ವೃತ್ತವು (5,0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$25 + 10g + c = 0 \qquad \ldots(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ ವೃತ್ತವು (1,4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$17 + 2g + 8f + c = 0 \qquad \ldots(2)$$

$(-g, -f)$ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು $x + y - 3 = 0$ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$-g - f = 3 \qquad \ldots(3)$$

$(1)-(2)\quad 8g-8f=-8$

ಅಥವಾ $\quad g-f=-1 \quad \ldots(4)$

ಸಮೀಕರಣ (3) ಮತ್ತು (4)ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ

$$\begin{array}{r} -g-f=3 \\ g-f=-1 \\ \hline -2f=2 \end{array}$$

$\therefore\ f=-1,\ g=f-1=-2,\ c=-5$

ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2+y^2-4x-2y-5=0$$

12. $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ ವೃತ್ತವು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತವು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, $r=|f|$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು $\equiv(3,1)$ ಮತ್ತು

ತ್ರಿಜ್ಯ $=\sqrt{9+1-9}=1$

ಆದ್ದರಿಂದ $r=|f|$ ಎನ್ನುವ ಸಂಬಂಧವು ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ.

13. $x^2+y^2+2x+3y+k=0$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $2\frac{1}{2}$ ಆದರೆ kನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, $(5,\ 2\frac{1}{2})$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವು $\left(-1,\frac{-3}{2}\right)$

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $2\frac{1}{2}$ ಮಾನಗಳು

ಅಂದರೆ, $\quad \sqrt{1+\frac{9}{4}-k}=\frac{5}{2}$

$$\frac{13-4k}{4}=\frac{25}{4}$$

$$4k=-12$$

ಅಥವಾ $\quad k=-3$

$\left(5, \frac{5}{2}\right)$ ಮತ್ತು $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - \frac{5}{2} = \frac{\frac{-3}{2} - \frac{5}{2}}{-1-5}(x-5)$$

$$-6\left(y - \frac{5}{2}\right) = -4(x-5) \quad \text{ಅಥವಾ} \quad 4x - 6y = 5$$

14. $3x^2 + 3y^2 - 5x + 3y = 0$ ವೃತ್ತದ ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ವಿಚ್ಛೇದನಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

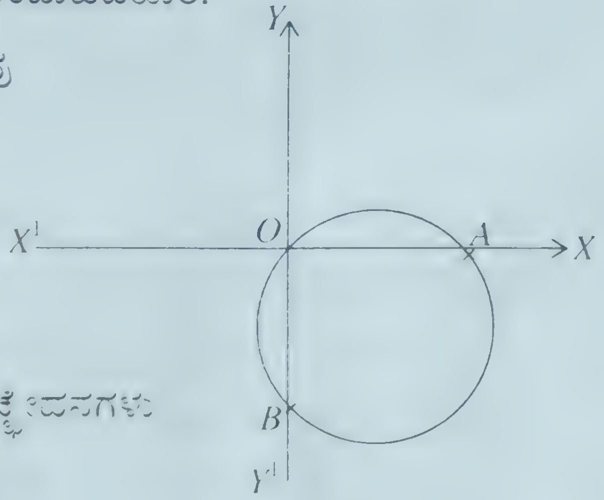
ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು

$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x + y = 0$

$y = 0$ ಆದಾಗ $OA = \frac{5}{3}$

$x = 0$ ಆದಾಗ $OB = 1$

ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ಛಿಚ್ಛೇದನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{5}{3}$ ಮತ್ತು 1.



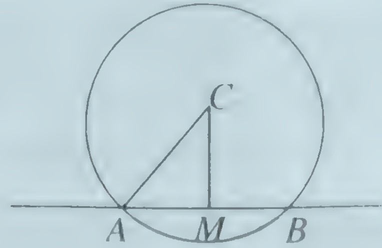
ಚಿತ್ರ 5.10

15. $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ ವೃತ್ತದಿಂದ ಛಿಚ್ಛೇದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ $x - 7y - 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು $\equiv (4, 3)$

ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$

$CM = \left|\frac{4 - 7(3) - 8}{\sqrt{1+49}}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$



ಚಿತ್ರ 5.11

ಆದ್ದರಿಂದ $AB = 2\sqrt{(\text{ತ್ರಿಜ್ಯ})^2 - (CM)^2} = 2\sqrt{25 - \frac{25}{2}} = 5\sqrt{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

I ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

	ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು	ತ್ರಿಜ್ಯ
1.	(3, -5)	4
2.	(0, -5)	6

II ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $2(x^2 + y^2) + 6x - 10y + 9 = 0$
2. $5x^2 + 5y^2 + 4x - 8y = 16$

III

1. (1,1), (2, −1) ಮತ್ತು (3, 2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು $4x - y = 17$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
3. $x + y = 6$ ಮತ್ತು $x + 2y = 4$ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿದ್ದು, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 10 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿದ್ದರೆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ x ಮತ್ತು y ರೇಖಾಂತರಗಳು ಧನದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಮತ್ತು 6 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. (6,1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವನ್ನುಳ್ಳ ಮತ್ತು $5x + 12y = 3$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. (1,2) ಮತ್ತು (2, 4) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ ವೃತ್ತವು ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 15 = 0$ ವೃತ್ತಗಳು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

9. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$

ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವು ವೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $x = 0$, $y = 0$ ಮತ್ತು $x = c$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. (1,1), (−2, 2), (−2, −8) ಮತ್ತು (-6, 0) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕವೃತ್ತಸ್ಥ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. (5, 1) ಮತ್ತು (3, 4) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $3x + y = 15$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (−1, −1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಮತ್ತು 3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. (−1, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವನ್ನುಳ್ಳ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ವೃತ್ತವು ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ಛಿದ್ಯಛೇದನಗಳು 5 ಮಾನಗಳಷ್ಟಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $5x - y - 17 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು (4, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಮತ್ತು $\sqrt{26}$ ನಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. (−4, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x + y = 2$ ಮತ್ತು $x - y = 2$ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. y−ಅಕ್ಷವನ್ನು (0, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ವಿಚ್ಛೇದನವು 8 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. (−4, 3) ಮತ್ತು (12,−1) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ವಿಚ್ಛೇದನದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.2.1 ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ

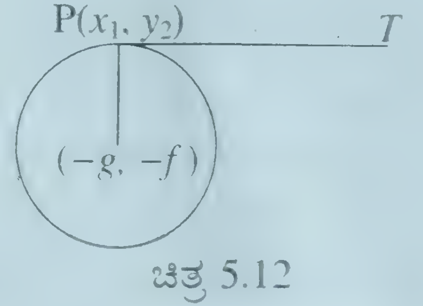
ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಆಗಿರಲಿ. $P(x_1, y_1)$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದು PT ಸರಳರೇಖೆಯು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ.

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು C ಆಗಿದ್ದು ಚಿತ್ರ 5.12ರ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ CP ಮತ್ತು PT ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

CPಯ ಓಟ $= \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}$

ಆದ್ದರಿಂದ PT ಯ ಓಟ

$$= -\left(\frac{x_1 + g}{y_1 + f}\right)$$



ಚಿತ್ರ 5.12

ಸ್ಪರ್ಶಕ PTಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = -\left(\frac{x_1 + g}{y_1 + f}\right)(x - x_1)$$

$$(y - y_1)(y_1 + f) = -(x_1 + g)(x - x_1)$$

ಅಥವಾ $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ $(gx_1 + fy_1 + c)$ ಅನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿದಾಗ

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವು ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯ ಉಕ್ತಿಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$\mathbf{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.}$$

5.2.2 $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2 + y^2 = a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಇರುವ ನಿಬಂಧನೆ

$y = mx + c$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ yನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ $x^2 + y^2 = a^2$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$$

ಇದು x–ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಏಕಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ನೈಜವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$4m^2c^2 - 4(c^2 - a^2)(1 - m^2) = 0$$

ಅಥವಾ $a^2(1 + m^2) = c^2$

i.e., $\mathbf{c = \pm a\sqrt{1 + m^2}}$

ಇದು $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು

$x^2 + y^2 = a^2$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ.

ಸೂಚನೆ: ಈ ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದಾಗಿ, $x^2 + y^2 = a^2$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ

$$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2} \qquad \ldots(1)$$

ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಒಟಿ mಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತ ಹೋದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಯುಗ್ಮಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ವೃತ್ತವು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ $x^2 + y^2 = a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಗಣ(1)ದ "**ಆವರಣ**" (ಎನ್ವಲಪ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಆಅ $x^2 + y^2 = 100$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ (–6, 8) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು $xx_1 + yy_1 = a^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

   $$x(-6) + y(8) = 100$$

   ಅಥವಾ $\quad 6x - 8y + 100 = 0$

   i.e., $\quad 3x - 4y + 50 = 0$

2. $5(x^2 + y^2) + 4x + 2y - 60 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ (1, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   ವೃತ್ತದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಿದಾಗ

   $$x^2 + y^2 + \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y - 12 = 0$$

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x(1) + y(3) + \frac{4}{5}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{y+3}{2}\right) - 12 = 0$$

ಅಥವಾ $\quad 10x + 30y + 4x + 4 + 2y + 6 - 120 = 0$

ಅಂದರೆ $\quad 14x + 32y - 110 = 0$ i.e., $7x + 16y - 55 = 0$

3. $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$ ಈ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಮತ್ತು $2x + y = 7$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತಹ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x + y = 7$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣವು

$$2x + y + k = 0$$

ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಸ್ಪರ್ಶಕವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

ತ್ರಿಜ್ಯ =|ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕ $2x + y = k$ ನಡುವಿನ ಲಂಬದೂರ|

$$\therefore \sqrt{25+1-6} = \left|\frac{2(-5)+(1)+k}{\sqrt{4+1}}\right| \quad [\because \text{ ಕೇಂದ್ರ } \equiv (-5, 1)]$$

ಅಂದರೆ, $\sqrt{20}\sqrt{5} = |-9+k|$ ಅಥವಾ $-9 + k = \pm 10$

$\therefore$ $k = 19$ ಅಥವಾ -1.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು:

(i) $2x + y - 1 = 0$

(ii) $2x + y + 19 = 0$

4. $3x - 4y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$3x - 4y + 5 = 0$ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು $4x + 3y + k = 0$. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ $\equiv (1, 2)$.

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ,

|ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕ $4x + 3y + k = 0$ ನಡುವಿನ ಅಂತರ| = ತ್ರಿಜ್ಯ

ಅಂದರೆ $$\left|\frac{4(1)+3(2)+k}{\sqrt{16+9}}\right| = \sqrt{1+4+4}$$

$$10 + k = \pm 15$$

$$\therefore \quad k = 5 \text{ ಅಥವಾ } k = -25$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

(i) $4x+3y+5=0$

(ii) $4x+3y-25=0$

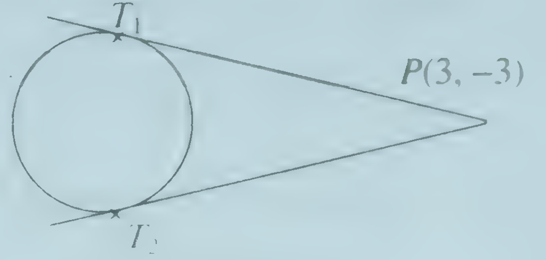
5. (3,–3) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2+y^2+8x+4y-5=0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

PT_1 ಮತ್ತು PT_2 ಸರಳರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ

PT_1ನ ಓಟವು m ಆಗಿರಲಿ,

ಆಗ PT_1 ನ ಸಮೀಕರಣವು

$y+3=m(x-3)$



ಚಿತ್ರ 5.13

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ,

$$\left|\frac{(-4)m-(-2)-3(m+1)}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\sqrt{16+4+5}$$

[∵ ಕೇಂದ್ರ = (–4, –2)]

ಅಥವಾ $-4m+2-3m-3=5\sqrt{m^2+1}$ ಅಥವಾ

$-7m-1=5\sqrt{m^2+1}$

ಅಥವಾ $24m^2+14m-24=0 \Rightarrow 12m^2+7m-12=0$

ಅಥವಾ $(3m+4)(4m-3)=0$

∴ ಆಗ $m=-\frac{4}{3}$ ಅಥವಾ $m=\frac{3}{4}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

(i) $3x-4y=21$

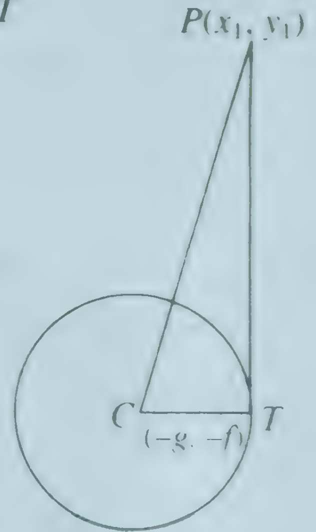
(ii) $4x+3y=3$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ 45^0ಗಳಷ್ಟು ಬಾಗುವುಳ್ಳ $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. (3, –3) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ ಈ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $x^2 + y^2 = 5$ ಈ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ (1, –2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕವು $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮರೇಖಾಂತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $3x - 4y - 7 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು (ii) ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಇರುವ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $7y - x = 5$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2 + y^2 - 5x + 5y = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. $3x - 2y = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$ ಈ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ಛೇದಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. mನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $y = mx + c$ಯು $x^2 + y^2 = 4y$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಲು ಇರುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $x + y = 2$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2 + y^2 = 2$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 3x + 3y - 8 = 0$ ಈ ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.3 ಒಂದು ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಎಂದಿರಲಿ. $P(x_1, y_1)$ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಇರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 5.14). $C(-g, -f)$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು PT ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ. CT ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $CT = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.



ಚಿತ್ರ 5.14

CTಯು PTಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ PCT ತ್ರಿಕೋಣದಿಂದ

$$PC^2 = PT^2 + CT^2$$

ಅಂದರೆ, $(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2$

$$= PT^2 + \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$$

ಅಥವಾ $PT^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

ಆದ್ದರಿಂದ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ

$$\mathbf{PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}}$$

ಸೂಚನೆ:

(1) (x_1, y_1) ಬಿಂದುವು **ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ** ಇದ್ದಲ್ಲಿ

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$$

(2) (x_1, y_1) ಬಿಂದುವು **ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ** ಇದ್ದಲ್ಲಿ

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$$

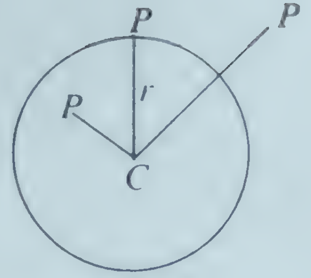
(3) (x_1, y_1) ಬಿಂದುವು **ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ** ಇದ್ದಲ್ಲಿ

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5.4.1 ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತ

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು C ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $CP^2 - r^2$, P ಬಿಂದುವಿನ **ಘಾತ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು (ಚಿತ್ರ 5.15)

(i) P ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $CP > r$, ಆಗ $CP^2 - r^2 > 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.15

(ii) ಆದೇ ರೀತಿ P ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ $CP < r$ ಆಗ $CP^2 - r^2 < 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) P ಬಿಂದವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ $CP^2 = r^2$

$P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು $(-g, -f)$ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

ಆಗ $CP^2 - r^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$

$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

ಇದು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತವೆನಿಸುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. (–2, 1), (0, 0) ಮತ್ತು (4, –3) ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x^2 + y^2 - 5x + 3y = 0$ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ, ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಒಳಗೆ ಇರುವುವೆಂಬುದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.
2. (–1, 0) (0, 2) ಮತ್ತು (–2, 1) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $3, \sqrt{10}, 3\sqrt{3}$ ಆದರೆ ಆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. (4, 1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $2(x^2 + y^2) - 3x + 4y + 6 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಈ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c_1 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ($c < c_1$).

5. ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು (ಪ್ರಮಾಣವು) 1:2 ಆದರೆ ಬಿಂದುಪಥವು ಒಂದು ವೃತ್ತವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

6. $P(f, g)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 = 6$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದದ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ $f^2 + g^2 + 4f + 4g + 2 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5.4.2 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಘಾತಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

ಮತ್ತು $$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \qquad \ldots(2)$$

ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

(1) ಮತ್ತು (2) ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ P ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತವು ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1 + c_1 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2$$

ಅಥವಾ $\mathbf{2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2) + f(c_1 - c_2) = 0}$

ಇದು ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಕ್ಷಾದ ಸಮೀಕರಣ.

ಸೂಚನೆ:

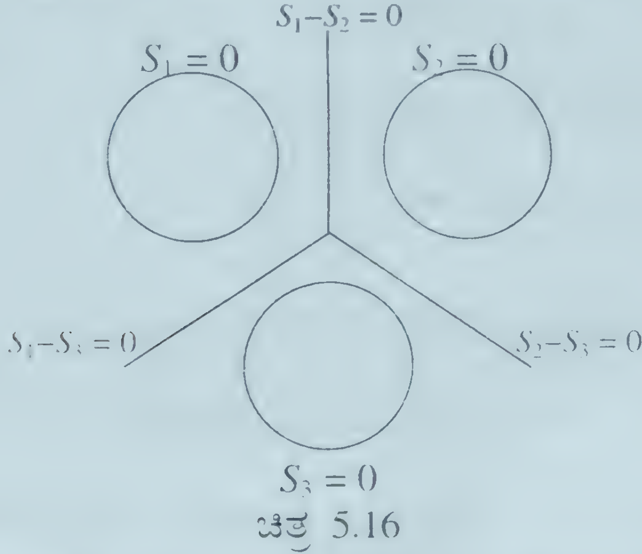
1. ಮೂಲಾಕ್ಷವು x ಮತ್ತು yನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಮೂಲಕ್ಷಾವು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ.**

2. $S = 0$ ಮತ್ತು $T = 0$ ಎಂಬುವು ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ

$\mathbf{S - T = 0}$ ಎಂಬುದು ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

5.4.3 ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷಕೇಂದ್ರ

ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಲ್ಲದಿರುವ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಸಲ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಂತೆ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಮೂರು ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗುವುವು. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷಕೇಂದ್ರವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು (ಚಿತ್ರ 5.16).

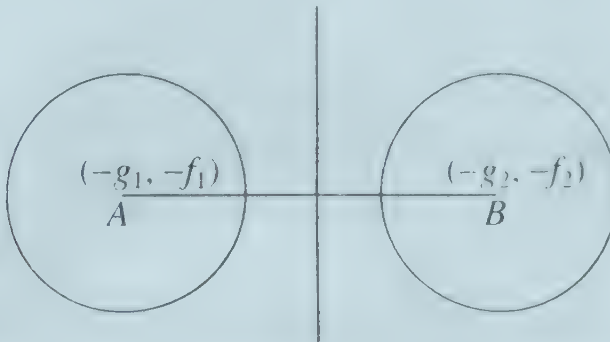


ಚಿತ್ರ 5.16

ಸೂಚನೆ: ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವು ವೃತ್ತಗಳ ಹೊರಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮನಾಗಿರುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು.

ಸಾಧನೆ:



ಚಿತ್ರ 5.17

ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0 \quad ...(1)$$

$$T \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad ...(2)$$

ಆಗಿರಲಿ ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು

$$S - T = 0$$

ಅಂದರೆ, $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0 \quad ...(3)$

A ಮತ್ತು B ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು $m_1 = \dfrac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2}$

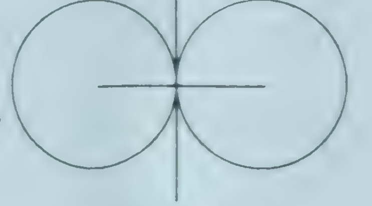
(3) ರಿಂದ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಓಟವು $m_2 = -\left(\dfrac{g_1 - g_2}{f_1 - f_2}\right)$

ಇದರಿಂದ $m_1m_2 = -1$ ಎಂಬುದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

ಆ ಕಾರಣ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದೆಂಬುದು ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ.

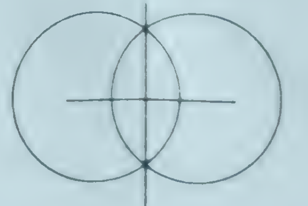
ಸೂಚನೆ:

1. ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಅವುಗಳ **ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ**ವಾಗಿರುವುದು (ಚಿತ್ರ 5.18).



ಚಿತ್ರ 5.18

2. ವೃತ್ತಗಳು ಛೇದಿಸಿದರೆ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಅವುಗಳ **ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ** ಆಗಿರುವುದು (ಚಿತ್ರ 5.19)



ಚಿತ್ರ 5.19

3. ಎರಡು ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದರ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^2+y^2+2x+3y+1=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+4x+3y+2=0$ ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ ಮೂಲಾಕ್ಷವೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು

$(x^2+y^2+2x+3y+1)-(x^2+y^2+4x+3y+2)=0$

ಅಂದರೆ $-2x-1=0$ ಅಥವಾ $2x+1=0$.

2. $x^2+y^2+2ax+c=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+2by+c=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು C_1, C_2 ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು r_1, r_2 ಆಗಿರಲಿ. ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಮೂಲಾಕ್ಷವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x^2+y^2+2ax+c)-(x^2+y^2+2by+c)=0.$$

ಅಥವಾ $2ax-2by=0$, i.e., $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು $r_1=\sqrt{a^2-c}$ ಮತ್ತು $r_2=\sqrt{b^2-c}$

ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ, $C_1C_2=\sqrt{a^2+b^2}$

ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ $C_1C_2=r_1+r_2$

ಅಂದರೆ $(C_1C_2)^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2$

ಅಥವಾ $a^2+b^2=a^2-c+b^2-c+2\sqrt{a^2-c}\,\sqrt{b^2-c}$

ಅಥವಾ $2c=2\sqrt{a^2-c}\,\sqrt{b^2-c} \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$

3. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2 + y^2 - 16x + 16 = 0$

(ii) $3x^2 + 3y^2 - 36x + 8 = 0$ ಮತ್ತು

(iii) $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 8 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 16x + 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x - 12y + 8 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು} \\ 12y + 8 = 0 \text{ ಅಥವಾ } y = -\frac{8}{12} = \frac{-2}{3} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 16x + 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + \frac{8}{3} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು} \\ -4x + \frac{40}{3} = 0 \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{10}{3} \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು $\equiv \left(\frac{10}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 7 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

2. $2x^2 + 2y^2 - x + 5y - 7 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 3x + 4y - 2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 4 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^2 + y^2 + 4x + 7 = 0$, $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 9 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + y = 0$ ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ ಮತ್ತು $5(x^2 + y^2) - 8x - 14y - 32 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.5.1 ಲಂಬ ವೃತ್ತಗಳು

ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾದರೆ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

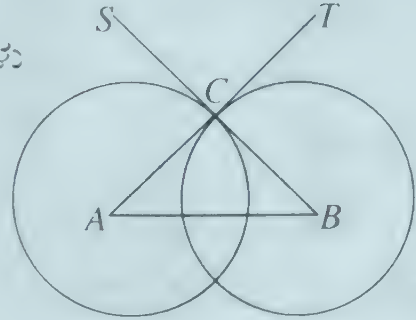
5.5.2 ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳಾಗಿರಲು ನಿಬಂಧನೆ

ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

ಮತ್ತು

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$



ಚಿತ್ರ 5.20

ಆಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು $A(-g_1, -f_1)$ ಮತ್ತು $B(-g_2, -f_2)$

ಚಿತ್ರ 5.20ರ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$$AC = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad BC = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$$

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ ಮತ್ತು ಇವುಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗಾರಸ್ (ಬೌಧಾಯನ) ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

ಅಂದರೆ

$$(-g_1+g_2)^2+(-f_1+f_2)^2=(g_1^2+f_1^2-c_1)+(g_2^2+f_2^2-c_2)$$

ಅಥವಾ $$\mathbf{2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2}$$

ಸೂಚನೆ: ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವು ಆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-6x+4y-19=0$ ಈ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

   ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು
   $(-g_1, -f_1)\equiv(-1, 2)$ ಮತ್ತು $(-g_2, -f_2)\equiv(3, -2)$.

ಲಂಬವೃತ್ತಗಳಿಗಿರುವ ನಿಬಂಧನೆ:

$$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$2g_1g_2+2f_1f_2=2(1)(-3)+2(-2)(2)=-6-8=-14 \quad \ldots(1)$$

ಮತ್ತು $c_1+c_2=5-19=-14$ ...(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತವೆ.

2. $x^2+y^2-x+22y+3=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+7x+6y+c=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳಾದಲ್ಲಿ cಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$$

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)+2(11)(3)=3+c \quad \text{ಅಥವಾ} \quad c=\frac{119}{2}.$$

3. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು
$x^2+y^2+8x+4y-6=0$ ಹಾಗೂ
$x^2+y^2+2x+6y+1=0$
ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2+y^2+2gx+2fy=0 \qquad (\because\ c=0)$$

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ

$$2g(4)+2f(2)=0-6 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad 2g(1)+2f(3)=0+1$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $g=-1$ ಮತ್ತು $f=\frac{1}{2}$.

ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2+y^2-2x+y=0$$

4. $x^2+y^2+2x+4y+1=0$, $2x^2+2y^2+6x+8y-3=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-2x+6y-3=0$ ಈ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x^2+y^2+2x+4y+1=0 \qquad \ldots(1)$$

$$x^2+y^2+3x+4y-\frac{3}{2}=0 \qquad \ldots(2)$$

$$x^2+y^2-2x+6y-3=0 \qquad \ldots(3)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು, $x=\frac{5}{2}$

(1) ಮತ್ತು (3) ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು, $2x-y+2=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವು $\left(\frac{5}{2}, 7\right)$

ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{\frac{25}{4} + 49 + 5 + 28 + 1} = \sqrt{\frac{357}{4}}$

ಈಗ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 7)^2 = \frac{357}{4}$$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 5x - 14y - 34 = 0$.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

1. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x^2 + y^2 + 5x - 2y + 4 = 0$

   (ii) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

   (iii) $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$
3. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ ಹಾಗೂ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. (2,3) ಮತ್ತು (5,6) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಗಳುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು $3x + 4y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು $4x - 3y + 3 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವನ್ನುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 7 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರವು (3,4) ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು
$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$
ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. (0, a) ಮತ್ತು (0, $-a$) ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಈ ವೃತ್ತಗಳು $c^2 = a^2(2+m^2)$ ಆದರೆ ಮಾತ್ರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು $x + y = 4$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಹಾಗು $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ ಈ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ಶಂಕುಜಗಳು

6.1 ಶಂಕುಜಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಪೊಳ್ಳಾದ ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಸಮತಲವೊಂದರಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಶಂಕುಜಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಮತಲವು ಶಂಕುವಿನ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಶಂಕುಜವನ್ನು ವೃತ್ತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಶಂಕುವಿನ ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗಿನ ಸಮತಲದ ಬಾಗುವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವ ಮೂಲಕ ವಿವಿಧ ಶಂಕುಜ ವಕ್ರರೇಖೆ ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು **ಪರವಲಯ** (ಪೆರಬೋಲಾ), **ದೀರ್ಘವೃತ್ತ** (ಎಲಿಪ್ಸ್), **ಅತಿಪರವಲಯ** (ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ) ಎಂದು ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ಶಂಕುಜವನ್ನು, ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವ ದೂರ ಮತ್ತು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಇರುವ ದೂರದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು (ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು) ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದು ಪಥವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು **ನಾಭಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು **ಚಾಲಕ** (ಡೈರೆಕ್ಟ್ರಿಕ್ಸ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥಿರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು **ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

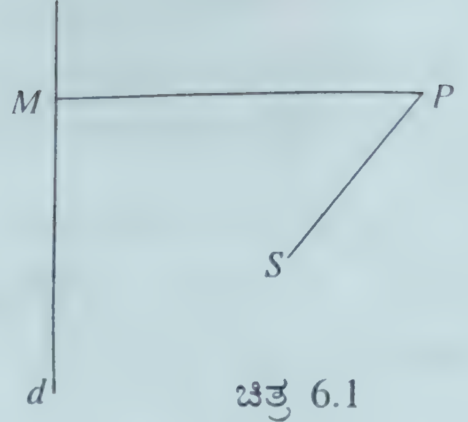
P ಯಾವುದೆ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. Sಅನ್ನು ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ, d ಅನ್ನು ಚಾಲಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 6.1).

PM ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ.

ಶಂಕುಜದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, $\frac{SP}{PM} = e$

ಒಂದು ಸ್ಥಿರಪ್ರಮಾಣವಾಗಿರಲಿ.

e ಅನ್ನು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ (ಎಕ್ಸೆಂಟ್ರಿಸಿಟಿ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 6.1

(i) $e = 1$ ಆದಾಗ, ಶಂಕುಜವನ್ನು ಪರವಲಯ(ಪೆರಾಬೊಲಾ) ಎಂದೂ,

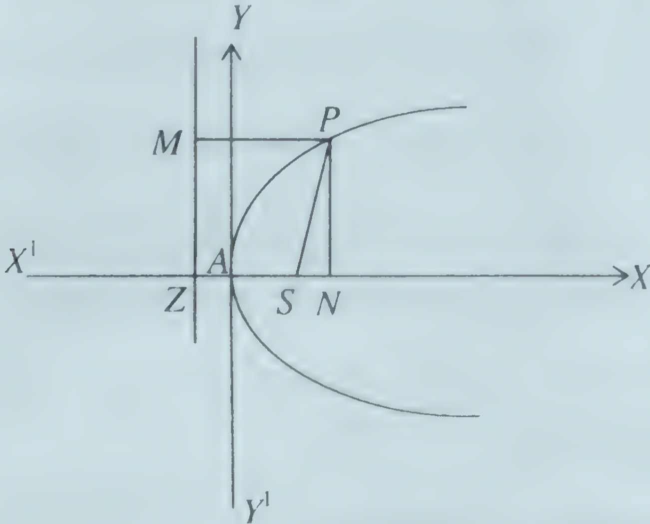
(ii) $e < 1$ ಆದಾಗ, ಶಂಕುಜವನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ(ಎಲಿಪ್ಸ್) ಎಂದೂ,

(iii) $e > 1$ ಆದಾಗ, ಶಂಕುಜವನ್ನು ಅತಿಪರವಲಯ(ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ) ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

6.2.1 ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ

ಯಾವ ಶಂಕುಜದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆಯೋ ಅಂತಹ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಪೆರಾಬೊಲಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 6.2ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $P(x, y)$ ಎಂಬುದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಈ ಬಿಂದುವು d ಚಾಲಕದಿಂದಲೂ, S ನಾಭಿಯಿಂದಲೂ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.2

PM ಸರಳರೇಖೆಯು ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. *S* ಮುಖಾಂತರ *SZ* ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. $SZ = a$ ಎಂದಿರಲಿ. *A* ಎಂಬುದು *SZ*ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $SA = AZ = a$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

*A*ಅನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು XAX^1ಅನ್ನು $x-$ಅಕ್ಷವೆಂದೂ, XAY^1ಅನ್ನು $y-$ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. *P*ಯಿಂದ *x*-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ *PN* ಎಳೆಯಿರಿ.

*A*ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (0, 0) ಮತ್ತು ನಾಭಿ *S* ಬಿಂದುವು $x-$ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(a, 0)$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ಪೆರಾಬೊಲಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ *P* ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥದ ನಿಬಂಧನೆ

$$SP = PM \quad \text{ಅಥವಾ} \quad SP^2 = PM^2$$

ಅಂದರೆ $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

ಅಥವಾ $\mathbf{y^2 = 4ax}$

ಇದು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ

6.2.2 ಪೆರಾಬೊಲಾ $y^2 = 4ax$ ನ ಲಕ್ಷಣಗಳು

1. *x* ಮತ್ತು *y* ಗಳಿಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಬಲಗಡೆಗೆ ಮುಚ್ಚಿರದ ಅನಂತ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವುದು.

2. *AX* ಅನ್ನು ಪೆರಾಬೊಲಾದ **ಅಕ್ಷ**ವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

3. ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯು $x-$ಅಕ್ಷದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಾಂಗವಾಗಿರುವುದು.

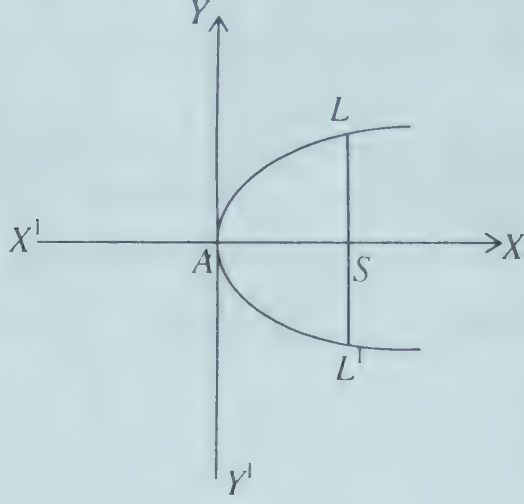
4. ಚಿತ್ರ 6.2ರಲ್ಲಿ *A* ಬಿಂದುವನ್ನು **ಶೃಂಗ**ವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (0, 0) ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

5. *S* **ನಾಭಿ**ಯು $x-$ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(a, 0)$ ಆಗುತ್ತವೆ.

6. *d* **ಚಾಲಕ**ದ ಸಮೀಕರಣವು $x = -a$ ಅಂದರೆ $x + a = 0$ ಎಂದಾಗುವುದು.

6.2.3 ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ

ಪೆರಾಬೊಲಾದ ನಾಭಿ ಮೂಲಕ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಜ್ಯಾ ಅನ್ನು **ನಾಭಿಲಂಬ** (ಲ್ಯಾಟಸ್ ರೆಕ್ಟಂ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 6.3

ಚಿತ್ರ 6.3ರಲ್ಲಿ LSL^1 ನಾಭಿಲಂಬವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. L ಮತ್ತು L^1 ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (a, SL) ಮತ್ತು $(a, -SL)$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$L(a, SL)$ ಬಿಂದುವು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ $(SL)^2 = 4a.a$ ಅಥವಾ $SL = 2a$ ಆಗುವುದು.

ಆಗ ನಾಭಿಲಂಬ $LL' = 4a$ ಆಗುವುದು.

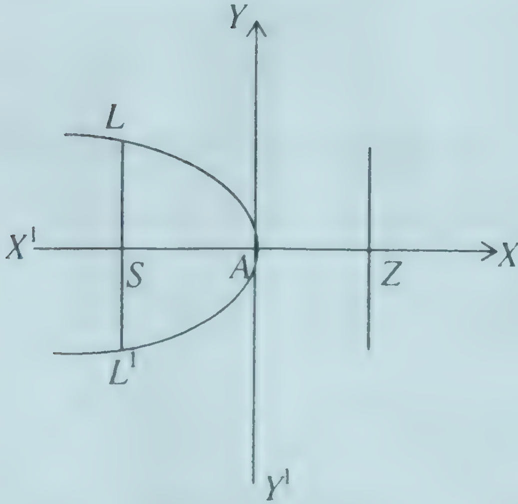
L ಮತ್ತು L'ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(a, 2a)$ ಮತ್ತು $(a, -2a)$ ಆಗುವುವು. SL ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು **ನಾಭಿಲಂಭಾರ್ಧ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ: ನಾಭಿ $(a, 0)$ ಮತ್ತು $P(x, y)$ ಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು **ನಾಭಿದೂರ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

6.2.4 ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಇತರ ರೂಪಗಳು

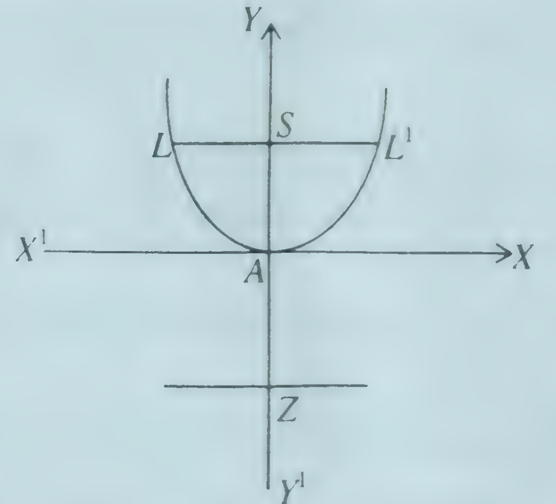
ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು	$y^2 = -4ax$ ಚಿತ್ರ (6.4)	$x^2 = 4ay$ ಚಿತ್ರ (6.5)	$x^2 = -4ay$ ಚಿತ್ರ (6.6)
ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಅಕ್ಷ	$y = 0$ (x- ಅಕ್ಷ)	$x = 0$ (y- ಅಕ್ಷ)	$x = 0$ (y- ಅಕ್ಷ)
ಶೃಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣ	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
ನಾಭಿ	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು	$(-a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$	$(\pm 2a, -a)$
ನಾಭಿ ಲಂಬದೂರ	$4a$	$4a$	$4a$

(1) $y^2 = -4ax$



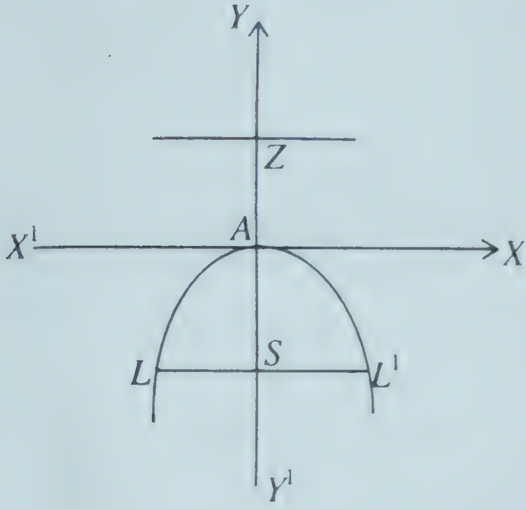
ಚಿತ್ರ 6.4

(2) $x^2 = 4ay$

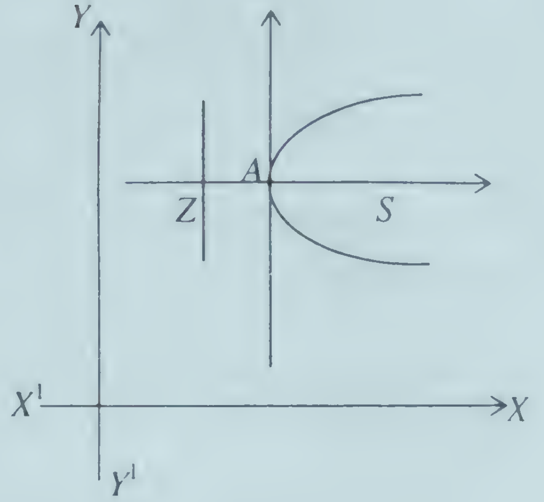


ಚಿತ್ರ 6.5

(3) $x^2 = -4ay$ (4) $(y-k)^2 = 4a(x-b)$



ಚಿತ್ರ 6.6



ಚಿತ್ರ 6.7

6.2.5 ಪ್ರಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$x = at^2$, $y = 2at$ ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳು $y^2 = 4ax$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಿತೀಯ(ಪ್ಯಾರಾಮೆಟ್ರಿಕ್) ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ನಾಭಿಯು (1, −1) ಮತ್ತು ಚಾಲಕವು $x + y + 7 = 0$ ಆಗಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$P(x, y)$ ಪೆರಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು S ನಾಭಿಯಾಗಿರಲಿ. PM ಅನ್ನು ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದಾಗ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ

$$SP = PM \quad \Rightarrow \quad SP^2 = PM^2$$

ಅಂದರೆ, $$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \left|\frac{x+y+7}{\sqrt{2}}\right|^2$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ, ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2 + y^2 - 18x - 10y - 45 = 0$$

2. $y^2 = ax + b$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ನಾಭಿ, ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y^2 = ax + b$$

ಅಥವಾ $$y^2 = a\left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right]$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೊಲಿಸಿದಾಗ

ನಾಭಿಯು $\equiv \left(\frac{a^2 - 4b}{4a}, 0\right)$

ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಉದ್ದ $= 4\left(\frac{a}{4}\right) = a$

ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣ, $x + \frac{b}{a} = -\frac{a}{4}$

ಅಥವಾ $4ax + a^2 + 4b = 0$

3. $y^2 = 8x$ ಪೆರಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿದೂರ 8 ಆದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ $y^2 = 8x$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$y^2 = 4ax$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

ನಾಭಿದೂರ $= 8$

ಅಂದರೆ, $x_1 + a = 8$

ಅಥವಾ $x_1 = 8 - 2 = 6$

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$y_1^2 = 8(6) \quad \text{ಅಥವಾ} \quad y_1 = \pm 4\sqrt{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಹ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(6, \pm 4\sqrt{3})$.

4. $y^2 = 36x$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲೆ x ನಿರ್ದೇಶಕದ ಮೂರರಷ್ಟಿರುವ y ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$P(x, 3x)$ ಬಿಂದುವು $y^2 = 36x$ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ

ಆಗ $(3x)^2 = 36x$

$9x^2 = 36x \Rightarrow x = 4$

ಆದ್ದರಿಂದ $y = \pm 12$

$\therefore\ P = (4, \pm 12).$

5. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾಗಳ ನಾಭಿ, ಶೃಂಗ, ನಾಭಿಲಂಬದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $y^2 - 4y + 4x = 0$ (ii) $x^2 - 8x + 2y + 7 = 0$

(i) $y^2 - 4y = -4x$

i.e., $y^2 - 4y + 4 = -4x + 4$

ಅಥವಾ $(y-2)^2 = -4(x-1) \Rightarrow a = 1$

ಈ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಶೃಂಗ $\equiv (1, 2)$

ನಾಭಿ $\equiv (h-a, k) \equiv (0, 2)$ ಮತ್ತು

ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣ: $x - 1 = 1$ i.e., $x - 2 = 0$

ನಾಭಿಲಂಬದ ತುದಿಗಳು, $(h-a, k \pm 2a) \equiv (0, 2 \pm 2)$

ಅಂದರೆ $(0, 4)$ ಮತ್ತು $(0, 0)$

(ii) $x^2 - 8x + 2y + 7 = 0$

i.e., $x^2 - 8x + 16 = -2y - 7 + 16$

ಅಥವಾ $(x-4)^2 = -2\left(y - \frac{9}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

ಶೃಂಗ $\equiv (h, k) \equiv \left(4, \frac{9}{2}\right)$

ನಾಭಿ $\equiv (h, k-a) \equiv \left(4, \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = (4,4)$

ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣ $y - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}, \quad y = 5$

ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು $\equiv (h \pm 2a, k-a)$

$$\equiv \left(4 \pm 1, \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

ಅಂದರೆ (i) (5, 4), (ii) (3, 4)

6. (a,b) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಾಭಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಆಗಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$P(x, y)$ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಪೆರಾಬೊಲಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ

$$SP^2 = PM^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{(bx + ay - ab)^2}{(b^2 + a^2)}$$

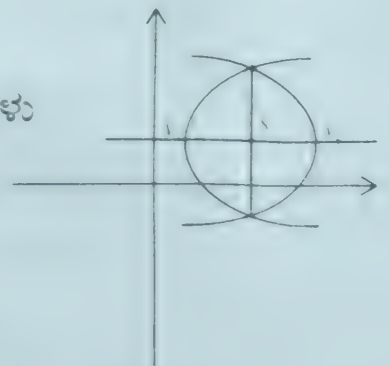
ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 - 2a^3x - 2b^3y + a^4 + b^4 + a^2b^2 = 0$$

7. ನಾಭಿಲಂಬದ ತುದಿಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (2, -1) ಮತ್ತು (2, 5) ಆಗಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಾಭಿಲಂಬದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೇ ನಾಭಿ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$S \equiv \left[\frac{2+2}{2}, \frac{5-1}{2}\right] = (2,2)$$



ಚಿತ್ರ 6.8

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ

$$= 4a = \sqrt{(2-2)^2 + (5+1)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2} = 6$$

$$\therefore \quad a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

ಚಿತ್ರ 6.8ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳಾದ V_1 ಮತ್ತು V_2. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ V_1 ಶೃಂಗವು ನಾಭಿಯ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೂ V_2 ಶೃಂಗವು ನಾಭಿಯ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು:

$$V_1 \equiv \left(\frac{1}{2}, 2\right) \quad \text{ಮತ್ತು} \quad V_2 = \left(\frac{7}{2}, 2\right).$$

ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು:

$$(i) \quad (y-2)^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$(ii) \quad (y-2)^2 = -6\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

I. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾಗಳ ನಾಭಿ, ಶೃಂಗ, ನಾಭಿಲಂಬದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $y^2 = 20x$
2. $3x^2 + 2y = 0$
3. $y^2 = 4x - 2y + 3$

II

1. ಶೃಂಗವು (0, 0) ಮತ್ತು ಅಕ್ಷವು y−ಅಕ್ಷವಾಗಿದ್ದು $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ನಾಭಿಯು (3, -4) ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವು $x - y + 5 = 0$ ಆಗಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

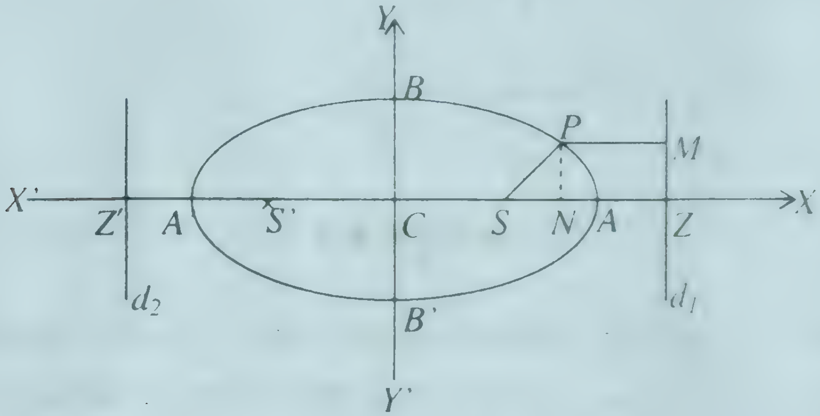
3. $y^2 = 8x$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿದೂರವು 4 ಆಗಿದ್ದರೆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ನಾಭಿಲಂಬದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು (6, 7) ಮತ್ತು (6, -1) ಆದರೆ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವು $y = 1$ ಮತ್ತು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಅಕ್ಷವು $x = 1$ ಹಾಗೂ ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ 16 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.3.1 ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ

ಐಕ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯುಳ್ಳ ಶಂಕುಜಗಳು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 6.9

S ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು d_1 ಚಾಲಕವಾಗಿಯೂ ಹಾಗೂ e ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯೂ ಆಗಿರಲಿ. d_1 ಚಾಲಕಕ್ಕೆ SZ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 6.9).

SZ ಸರಳರೇಖೆಯು A ಮತ್ತು A' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಂತರೀಯ ವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ $e : 1$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಿಂದ ವಿಭಜಿಸಲಿ. ಅಂದರೆ

$$\frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1} \qquad \dots (1)$$

$AA' = 2a$ ಆಗಿರಲಿ. Cಯು AA'ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. Cಅನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು CZ ರೇಖೆಯನ್ನು x-ಅಕ್ಷವಾಗಿಯೂ, CY ರೇಖೆಯನ್ನು y-ಅಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ

$$SA = eAZ \text{ ಮತ್ತು } SA' = eA'Z \qquad ...(2)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ (2) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿದಾಗ

$$SA + SA' = e[AZ + A'Z]$$

ಚಿತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$$AA' = e[CZ - CA + CA' + CZ]$$

ಅಥವಾ $\quad AA' = e[2CZ] \qquad (\because CA = CA')$

ಅಂದರೆ $\quad 2a = 2eCZ$

ಅಥವಾ $\quad CZ = \dfrac{a}{e} \qquad ...(3)$

ಇದೇ ರೀತಿ (2) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವ್ಯವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$SA' - SA = e[A'Z - AZ]$$

ಅಂದರೆ $\quad CA' + CS - CA + CS = e(AA')$

ಅಂದರೆ $\quad 2CS = e(2a)$

ಅಥವಾ $\quad CS = ae \qquad ...(4)$

S ನಾಭಿಯು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$\mathbf{S \equiv (ae, 0)}$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥದ ನಿಬಂಧನೆಯು

$$\frac{SP}{PM} = e \qquad (e < 1)$$

ಅಂದರೆ $\quad SP = ePM$

ಅಥವಾ $\quad SP^2 = e^2 NZ^2 = e^2 (CZ - CN)^2$

ಸಮೀಕರಣ (3)ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ $(x-ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2$

ಅಥವಾ $x^2+a^2e^2-2xae+y^2=e^2x^2-2aex+a^2$

ಅಥವಾ $x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು $a^2(1-e^2)$ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

ಅಥವಾ $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \ldots (5)$$

ಸಮೀಕರಣ (5)ರಲ್ಲಿ $b^2=a^2(1-e^2)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (5)ಅನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

6.3.2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕಗಳು

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ xನ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=\pm a\left[1-\frac{y^2}{b^2}\right]^{1/2}$ ಇದರಲ್ಲಿ yನ ಬೆಲೆಯು bಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. yನ ಉತ್ಪನ್ನವು $y=\pm b\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]^{1/2}$. ಇದರಲ್ಲಿ xನ ಬೆಲೆಯು aಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

1. ಈ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು x-ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ.
2. Cಅನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3. ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಮತ್ತು A' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. AA'ಅನ್ನು **ದೀರ್ಘಾಕ್ಷವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. A ಮತ್ತು A'ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(a, 0)$ ಮತ್ತು $(-a, 0)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು y–ಅಕ್ಷವನ್ನು B ಮತ್ತು B' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. BB'ಅನ್ನು **ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. B ಮತ್ತು B'ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(0, b)$ ಮತ್ತು $(0, -b)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. $AA' = 2a$ ಮತ್ತು $BB' = 2b$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $a > b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

4. S ಮತ್ತು S'ಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(ae, 0)$ ಮತ್ತು $(-ae, 0)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

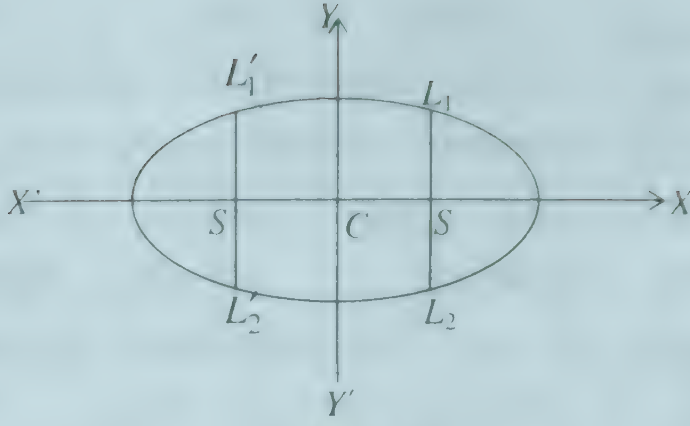
5. d_1, d_2 ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ **ಚಾಲಕಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x = \frac{a}{e}$ ಮತ್ತು $x = -\frac{a}{e}$.

6. ಎರಡು ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ $SS' = 2ae$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಎರಡು ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ $ZZ' = \frac{2a}{e}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

7. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

6.3.3 ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಉದ್ದ

ಚಿತ್ರ 6.10ರಲ್ಲಿ L_1L_2 ಜ್ಯಾವು S ನಾಭಿಯು ಮೂಲಕವೂ, $L_1'L_2'$ ಜ್ಯಾ S' ಮೂಲಕವೂ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. L_1SL_2ಅನ್ನು ಮತ್ತು $L_1'S'L_2'$ ಅನ್ನು **ನಾಭಿಲಂಬಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. L_1 ಮತ್ತು L_2 ಬಿಂದುಗಳು L_1SL_2 ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ae ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು y–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:



ಚಿತ್ರ 6.10

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = ae$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = b^2(1 - e^2) \Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$$

ಕಾರಣ,

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\frac{b^2}{a^2} = (1 - e^2)$$

ಅಥವಾ $y = \pm\frac{b^2}{a}$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಭಿಲಂಬಾಂತಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$L_1 \equiv \left(ae, \frac{b^2}{a}\right) \quad L_2 \equiv \left(ae, \frac{-b^2}{a}\right)$$

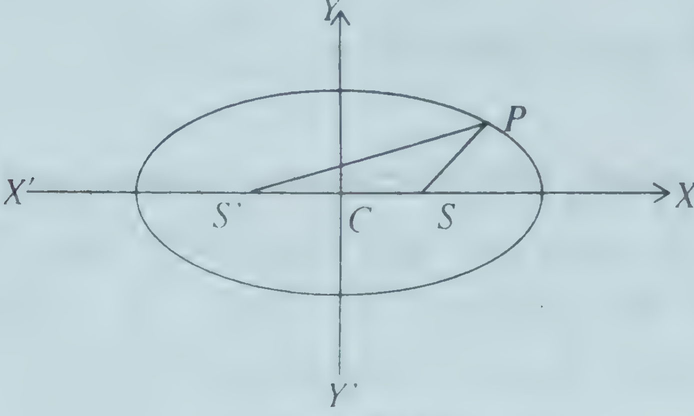
$$L_1' \equiv \left(-ae, \frac{b^2}{a}\right) \quad L_2' \equiv \left(-ae, \frac{-b^2}{a}\right)$$

ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $L_1L_2 = L_1'L_2' = \frac{2b^2}{a}$

ಅದೇರೀತಿ S ಮತ್ತು S' ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ, $SS' = 2ae$.

ಸೂಚನೆ:

(1) S ಮತ್ತು S'ಗಳಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ದೂರವನ್ನು **'ನಾಭಿದೂರ'**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 6.11ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ SP ಮತ್ತು $S'P$ಗಳನ್ನು ನಾಭಿದೂರಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 6.11

(2) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮತ್ತು ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಗಳ ಸಂಕಲನವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $SP + S'P = 2a$

6.3.4 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾದರಿ

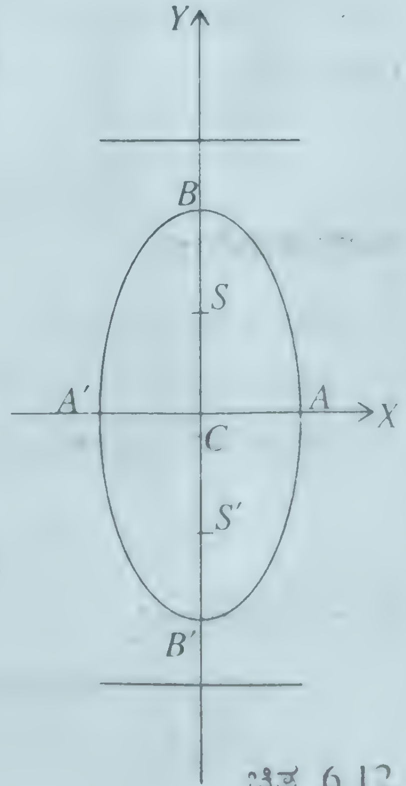
ಚಿತ್ರ 6.12ರಲ್ಲಿ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಸಮೀಕರಣವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ $a < b$ ಆಗಿರುವುದು.

ಈ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಕ್ಷಣಗಳು:

1. ನಾಭಿಗಳಾದ S, S' ಮತ್ತು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ BB' y–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ.

2. ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$y = \frac{b}{e} \text{ ಮತ್ತು } y = -\frac{b}{e}.$$



ಚಿತ್ರ 6.12

3. ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $=\frac{2a^2}{b}$

4. ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ $2b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ $2a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ, $e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

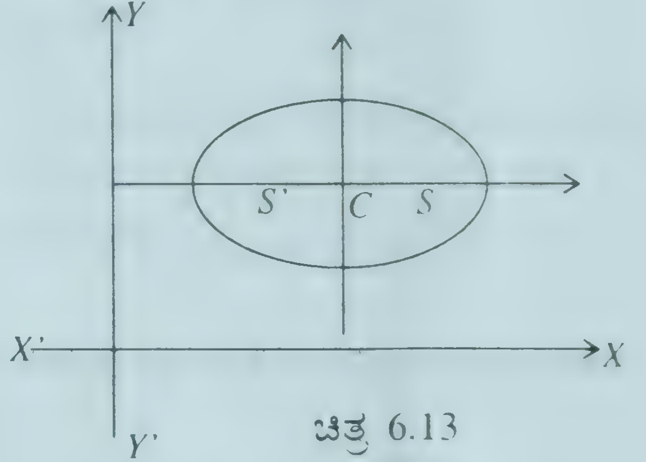
6.3.5 (h, k)ಅನ್ನು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗುಳ್ಳ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

$C(h, k)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗುಳ್ಳ ಮತ್ತು x- ಹಾಗೂ y-ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ $2a$ ಮತ್ತು $2b$ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ ಮತ್ತು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{(x-b)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

ನಾಭಿಗಳು $\equiv (h \pm ae, k)$

(ಚಿತ್ರ 6.13)



ಚಿತ್ರ 6.13

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $9x^2+25y^2=225$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ, ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ, ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ, ನಾಭಿಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$9x^2+25y^2=225 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $a>b$

ಆದ್ದರಿಂದ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ $2a=2\times 5=10$

ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ $=2b=2\times 3=6$

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\times9}{5} = \frac{18}{5}$

ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ = $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{4}{5}$

ನಾಭಿಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು = $(\pm ae, 0) \equiv (\pm4, 0)$

ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, $x = \pm\frac{a}{e}$ ಅಥವಾ $x = \pm\frac{25}{4}$.

2. $9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು, ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$$

$$\Rightarrow 9x^2-18x+9+25y^2+100y+100-225=0$$

ಅಂದರೆ, $9(x-1)^2+25(y+2)^2=225$

ಅಥವಾ $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

ಇದು $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿದೆ.

ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(h, k) \equiv (1, -2)$

ನಾಭಿಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\equiv (h \pm ae, k) \equiv (1 \pm 4, -2)$

ಅಂದರೆ, ನಾಭಿಗಳು $(5, -2)$ ಮತ್ತು $(-3, -2)$

ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳು, $x = h \pm \frac{a}{e} \equiv 1 \pm \frac{25}{4}$

ಅಥವಾ $4x-29=0$ ಮತ್ತು $4x+21=0$

3. (2, 2) ಮತ್ತು (3, 1) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ,

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \text{ ಮತ್ತು } \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $\frac{1}{a^2}=p$ ಮತ್ತು $\frac{1}{b^2}=q$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ $4p+4q=1$ ಮತ್ತು $9p+q=1$

ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$p=\frac{3}{32} \text{ ಮತ್ತು } q=\frac{5}{32}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$ ಅಥವಾ $3x^2+5y^2=32$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿಗಳನ್ನು, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2+3y^2-1=0$ (ii) $2x^2+5y^2=20$

   (iii) $9x^2+5y^2-30y=0$ (iv) $4x^2+5y^2+10y-75=0$

2. ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು (3,2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಾಭಿಯನ್ನು ಹಾಗೂ $x-y+1=0$ ಚಾಲಕವಾಗಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $P(2,7)$ ಮತ್ತು $Q(4,3)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $3x^2+4y^2+6x-8y=5$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ, ನಾಭಿ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $(2, -1)$, $(1, -2)$ ಮತ್ತು $\frac{1}{4}$ ಆದರೆ, ಆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ 5 ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{2}{3}$ ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳು $(1, 0)$ ಮತ್ತು $(-1, 0)$ ಹಾಗೂ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{1}{2}$ ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 4 ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 20 ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

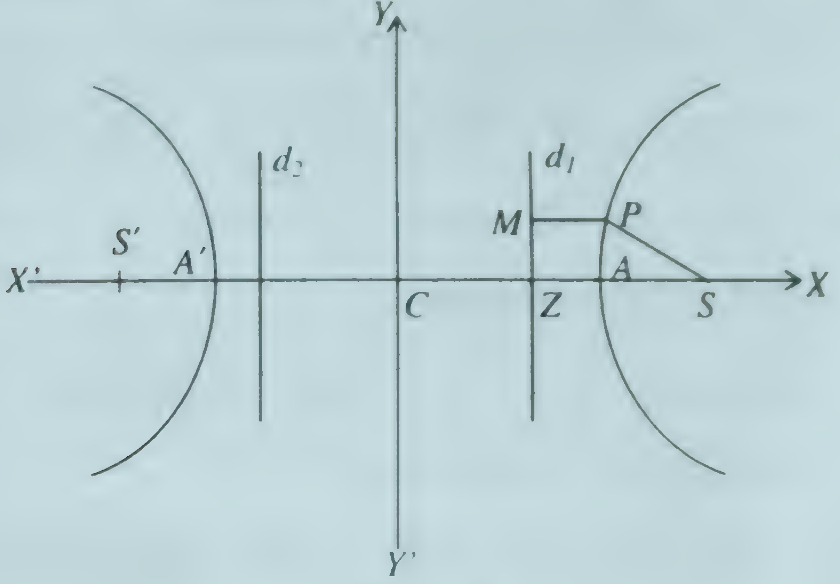
9. ನಾಭಿ, ಶೃಂಗ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(2,3)$, $(3,4)$ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ನಾಭಿಯು $(-1, 1)$ ಮತ್ತು ಚಾಲಕ $x-y+3=0$ ಹಾಗೂ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{1}{2}$ ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ನಾಭಿ ಬಿಂದುಗಳ ಅಂತರವು 4 ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 24 ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.4.1 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ

ಏಕ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನುಳ್ಳ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 6.14

ಚಿತ್ರ 6.14ರಲ್ಲಿ S ಬಿಂದುವು ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ, d_1 ಚಾಲಕವಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ. ಚಾಲಕ d_1ಗೆ SZ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

A ಮತ್ತು A' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ SZ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ $e : 1$ $(e > 1)$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿ.

ಅಂದರೆ $\frac{SA}{AZ} = \frac{e}{1} \Rightarrow SA = eAZ$ ... (1)

$$\frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1} \Rightarrow SA' = eA'Z \qquad \text{... (2)}$$

C ಬಿಂದುವು AA'ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $AA' = 2a$ ಆಗಿರಲಿ.

C ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, CX ಮತ್ತು CYಗಳನ್ನು x- ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2)ಅನ್ನು ಸಂಕಲಿಸುವುದರಿಂದ

$$SA + SA' = e(AZ + A'Z)$$

ಅಂದರೆ, $(CS - CA) + (CA' + CS) = eAA' \quad (\because \; CA = CA')$

$\therefore \; 2CS = 2ae$ ಅಥವಾ $CS = ae \; \therefore \; S \equiv (ae, 0)$

ಅದೇ ರೀತಿ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2)ಅನ್ನು ವ್ಯವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$SA' - SA = e(A'Z - AZ)$$

ಅಂದರೆ, $AA' = e[CA' + CZ - CA + CZ]$

ಅಥವಾ $2a = e(2CZ) \Rightarrow CZ = \dfrac{a}{e}$

$P(x, y)$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, $\dfrac{SP}{PM} = e, \; e > 1$

$\therefore \quad SP = ePM \Rightarrow SP^2 = e^2 PM^2$

ಅಂದರೆ, $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left[x - \dfrac{a}{e}\right]^2$

ಅಥವಾ $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$

ಅಥವಾ $(e^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1)$

$a^2(e^2 - 1)$ ನಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು ಬಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

ಅಥವಾ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ಇದರಲ್ಲಿ $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.

6.4.2 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮುಖ್ಯ ಲಾಕ್ಷಣಿಕಗಳು

1. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ yನ ಉತ್ಪನ್ನವು, $y=\pm b\left[\frac{x^2}{a^2}-1\right]$.

   ಇದರಲ್ಲಿ $x<a$ ಆದಾಗ y ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $x\ (>a)$ನ ನೈಜ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ yಗೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ yನ ನೈಜ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ xಗೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವೃತ್ತವು y–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದು.

2. Cಅನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (0, 0) ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

3. A ಮತ್ತು A'ಗಳನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ **ಶೃಂಗಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $A(a, 0)$ ಮತ್ತು $A'(-a, 0)$.

$AA'=2a$ ಅನ್ನು **ಛೇದಕ ಅಕ್ಷವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x=0$ ಆದಾಗ $y^2=-b^2$ ಆಗುವುದು. ಇದರಿಂದ yನ ಬೆಲೆಗಳು ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯು y–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ y–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $B(0, b)$ ಮತ್ತು $B'(0, -b)$ ಎಂದು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. $BB'=2b$ಅನ್ನು **ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

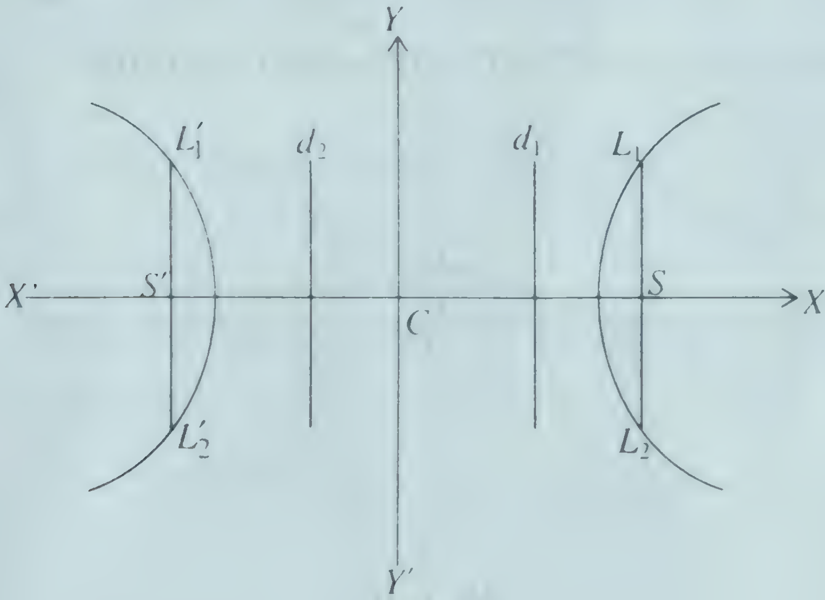
4. ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $e=\left[\frac{a^2+b^2}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

5. S, ಮತ್ತು S' ಗಳನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(ae, 0)$ ಮತ್ತು $(-ae, 0)$.

6. d_1 ಮತ್ತು d_2ಗಳನ್ನು ಚಾಲಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x = \frac{a}{e}$ ಮತ್ತು $x = -\frac{a}{e}$.

6.4.3 ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಉದ್ದ

S ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ L_1SL_2 ಜ್ಯಾವನ್ನು **ನಾಭಿಲಂಬವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. L_1 ಬಿಂದುವು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (ae, SL_1) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 6.15).



ಚಿತ್ರ 6.15

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ } SL^2 = \left[\frac{a^2e^2}{a^2} - 1\right]b^2$$

ಅಥವಾ $SL^2 = b^2(e^2 - 1) = b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$

ಅಂದರೆ $SL = \pm\frac{b^2}{a}$

ಕಾರಣ,

$b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\frac{b^2}{a^2} = (e^2 - 1)$

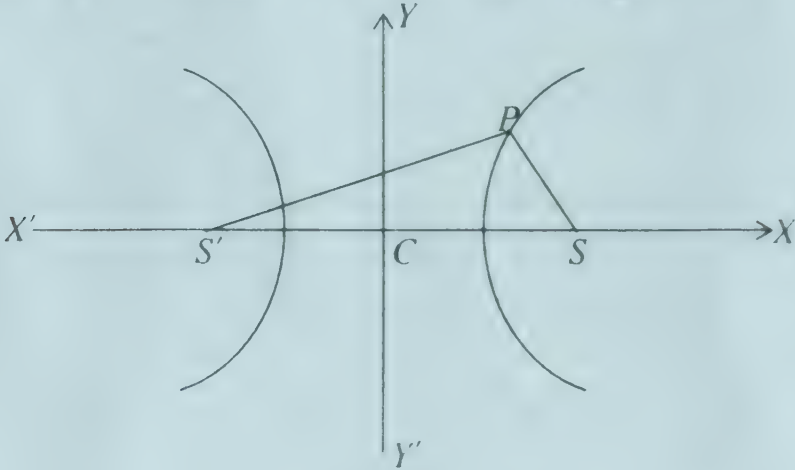
ಆದ್ದರಿಂದ L_1, L_2 ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$L_1 \equiv \left(ae.\frac{b^2}{a}\right)$ ಮತ್ತು $L_2 \equiv \left(ae.\frac{-b^2}{a}\right)$ ಹಾಗೂ L_1' ಮತ್ತು

L_2' ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $L_1' \equiv \left(-ae.\frac{b^2}{a}\right)$ ಮತ್ತು $L_2' \equiv \left(-ae.\frac{-b^2}{a}\right)$.

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $L_1L_2 = L_1'L_2' = \frac{2b^2}{a}$.

ಸೂಚನೆ: P ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಈ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು **ನಾಭಿದೂರವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವೊಂದರ ನಾಭಿದೂರ ಗಳ ವ್ಯವಕಲನವು ಸ್ಥಿರವೂ ಮತ್ತು ಅದು $2a$ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\mathbf{S'P - SP = 2a}$ (ಚಿತ್ರ 6.16).



ಚಿತ್ರ 6.16

6.4.4 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾದರಿ

ಛೇದಕ ಅಕ್ಷವನ್ನು y–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಹೊಂದಿರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾವನ್ನು ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ **ಅನುವರ್ತಿ** (ಕಾಂಜುಗೇಟ್) ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 6.17).
ಇದರ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

ಇದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$

ನಾಭಿ ಬಿಂದುಗಳು $(0, \pm be)$.

ಚಾಲಕಗಳು, $y = \pm \frac{b}{e}$

B, B'ಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

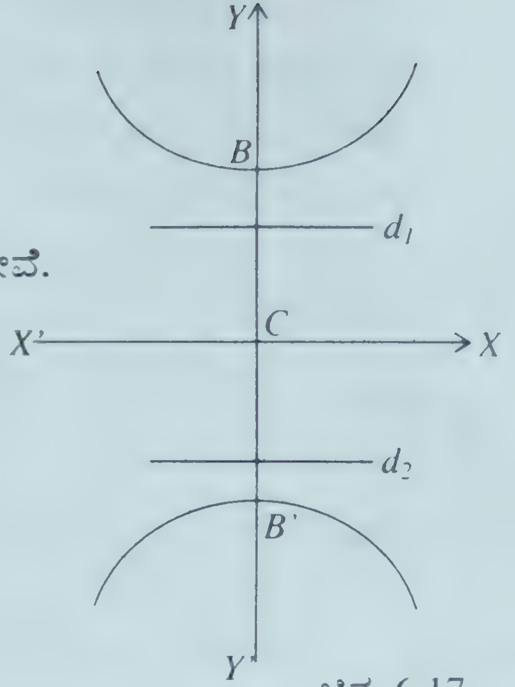
ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$(0, b)$ ಮತ್ತು $(0, -b)$.

ಛೇದಕ ಅಕ್ಷದ ಉದ್ದ $= 2b$ ಮತ್ತು

ಅನುಮತಿ ಅಕ್ಷದ ಉದ್ದ $= 2a$,

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $= \frac{2a^2}{b}$.



ಚಿತ್ರ 6.17

ಸೂಚನೆ:

1. $a = b$ ಆದಾಗ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 - y^2 = a^2$, ಅಂತಹ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾವನ್ನು ಲಂಬ(ರೆಕ್ಟ್ಯಾಂಗುಲರ್) ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.
2. ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು $(0, 0)$ದಿಂದ (h, k) ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಗಳ ಅಕ್ಷಗಳು, ಶೃಂಗಗಳು, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ, ನಾಭಿಗಳು, ಚಾಲಕಗಳು ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $9x^2 - 16y^2 = 144$ (ii) $x^2 - 3y^2 = -12$

(i) $9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

ಇಲ್ಲಿ $a^2 = 16$ ಮತ್ತು $b^2 = 9$

$\therefore \; a = 4$ ಮತ್ತು $b = 3$

ಛೇದಕ ಅಕ್ಷ $= 2a = 8$

ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ $= 2b = 6$

ಶೃಂಗಗಳು $\equiv (\pm\, a, 0) \equiv (\pm 4, 0)$

ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{16+9}}{4} = \dfrac{5}{4}$

ನಾಭಿ ಬಿಂದುಗಳು $= (\pm ae, 0) = (\pm 5, 0)$

ಚಾಲಕಗಳು , $x = \pm \dfrac{a}{e}$, $x = \pm \dfrac{16}{5}$

ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಉದ್ದ $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{9}{2}$

(ii) $x^2 - 3y^2 = -12 \quad \Rightarrow \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = -1$

$\therefore \; a = 2\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $b = 2$

ಛೇದಕ ಅಕ್ಷ $= 2b = 4$

ಅನುವರ್ತಿಅಕ್ಷ $= 2a = 4\sqrt{3}$

ಶೃಂಗಗಳು, $(0, \pm b) \equiv (0, \pm 2)$

ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = \dfrac{\sqrt{12+4}}{2} = 2$

ನಾಭಿಗಳು $\equiv (0, \pm 4)$

ಚಾಲಕಗಳು, $y = \pm \dfrac{b}{e} = \pm 1$

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $= \dfrac{2a^2}{b} = \dfrac{2(12)}{2} = 12$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1. $2x + y = 1$ ಅನ್ನು ಚಾಲಕವಾಗಿಯೂ, (1, 2) ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ, 3ಅನ್ನು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯಾಗುಳ್ಳ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x - y = 0$ ವನ್ನು ಚಾಲಕವಾಗಿಯೂ, (4, 0) ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ 2 ಇರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಅಕ್ಷಗಳು, ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳು, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $16x^2 - 9y^2 = 144$ (ii) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

   (iii) $25y^2 - 24x^2 = 600$ (iv) $x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 11 = 0$

   (v) $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

4. ನಾಭಿಗಳ ಅಂತರವು 8 ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $\frac{9}{2}$ ಇರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಲಂಬ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\sqrt{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ನಾಭಿಗಳ ಅಂತರವು 20 ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $\frac{64}{5}$ ಇರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ನಾಭಿಗಳು (2, 0) ಮತ್ತು (−2, 0) ಇರುವ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{3}{2}$ ಇರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. (0, ±7) ಶೃಂಗಗಳಾಗುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{4}{3}$ ಇರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ನಾಭಿಯು $(a, 0)$ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\frac{5}{4}$ ಹಾಗೂ ಚಾಲಕ $4x - 3y = a$ ಇರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.5 ಶಂಕುಜಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

6.5.1 $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲು ನಿಬಂಧನೆ

$y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಪೆರಬೊಲಾದ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು

$$(mx+c)^2 = 4ax \text{ ಅಥವಾ } m^2x^2 + 2x(mc-2a) + c^2 = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಪಡೆಯುಬಹುದು. ಇದು xನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು xನ ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $4(mc-2a)^2 - 4m^2c^2 = 0$.

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ, $c = \frac{a}{m}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $c = \frac{a}{m}$ ಆದಾಗ $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವುದು. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\left(\frac{a}{m^2}, 2am\right)$.

6.5.2 ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$y^2 = 4ax$ ದತ್ತ ಪೆರಾಬೊಲಾವಾಗಿರಲಿ. $P(x_1, y_1)$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

$y^2 = 4ax$ ಅನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4a \text{ ಅಥವಾ } \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \frac{2a}{y_1}$$

ಪೆರಬೊಲಾಕ್ಕೆ Pನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = \frac{2a}{y}(x - x_1) \quad \text{ಅಥವಾ} \quad yy_1 = 2a(x + x_1)$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

6.5.3 $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ

$y = mx + c$ ಯು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ $y = mx + c$ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mcx + a^2(c^2 - b^2) = 0$$

ಇದು xನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಇದರ ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳೂ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $4a^4m^2c^2 - 4(a^2m^2 + b^2)a^2(c^2 - b^2) = 0$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ $c^2 = a^2m^2 + b^2$

ಅಂದರೆ $c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$

ಆದಾಗ $y = mx + c$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವುದು.

6.5.4 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$P(x_1, y_1)$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow a^2yy_1-a^2y_1^2=-b^2xx_1+b^2x_1^2$$

ಅಥವಾ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$

($\because$ $P(x_1,y_1)$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದ್ದರಿಂದ)

$$\boldsymbol{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1}$$

ಹಾಗೆಯೇ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$$

6.5.5 $y=mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ

$y=mx+c$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$x^2(b^2-m^2a^2)-2mcxa^2-a^2(c^2+b^2)=0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದು xನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಇದರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳೂ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದರ ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $4m^2c^2a^4 + 4a^2(b^2 - a^2m^2)(c^2 + b^2) = 0$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$\boldsymbol{c^2 = a^2m^2 - b^2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$ ಆದಾಗ $y = mx + c$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುತ್ತದೆ.

6.5.6 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$P(x_1, y_1)$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$$

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow a^2yy_1 - a^2y_1^2 = b^2(xx_1) - b^2x_1^2$$

ಅಥವಾ $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

$P(x_1, y_1)$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದು $\therefore \boldsymbol{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1}$

ಅದೇ ರೀತಿ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು $y - y_1 = \frac{-a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $2y = 5x + k$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2 = 6x$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ kಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   $y = mx + c$ಯು ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ,

   $c = \frac{a}{m}$, ಆದ್ದರಿಂದ $y = \frac{5}{2}x + \frac{k}{2} \Rightarrow k = \frac{2(3/2)}{5/2} = \frac{6}{5}$

2. (6,0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$, ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(6,0)} \rightarrow \infty$$

ಆದ್ದರಿಂದ (6,0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು $x = 6$ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು $y = 0$.

3. (4, 10) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y^2 = 9x$ ಪೆರಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   $y^2 = 9x$ ಪೆರಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಯಾವುದೇ ಸ್ಪರ್ಶಕವ ಸಮೀಕರಣವು

$y = mx + \frac{9}{4m}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ

(ಕಾರಣ: $4a = 9$, $a = \frac{9}{4}$, ಸ್ಪರ್ಶಕದ ನಿಬಂಧನೆ $c = \frac{a}{m}$).

ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕ (4,10) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$10 = m(4) + \frac{9}{4m} \Rightarrow 40m = 16m^2 + 9$$

$$16m^2 - 40m + 9 = 0 \quad = (4m - 9)(4m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{9}{4} \text{ ಅಥವಾ } m = \frac{1}{4}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು

(i) $4y = 9x + 4$ (ii) $4y = x + 36$.

4. $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕವು $\left(\frac{a^2}{x_1}, -\frac{4a^2}{y_1}\right)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(x_1, y_1)ನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \Rightarrow m_1 = \frac{2a}{y_1} \quad \ldots (1)$$

$\left(\frac{a^2}{x_1}, -\frac{4a^2}{y_1}\right)$ನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y\left(-\frac{4a^2}{y_1}\right) = 2a\left(x + \frac{a^2}{x_1}\right) \Rightarrow m_2 = -\frac{y_1}{2a} \quad \ldots (2)$$

ಈಗ, ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$m_1 m_2 = \left(\frac{2a}{y_1}\right)\left(-\frac{y_1}{2a}\right) = -1$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು.

5. $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $x^2 = 4by$ ಈ ಪೆರಾಬೊಲಾಗಳಿಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $x^2 = 4by$ ಈ ಪೆರಬೊಲಾಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು

$$P \equiv \left(4a^{1/3}b^{2/3}, 4a^{2/3}b^{1/3}\right)$$

$y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y\left(4a^{2/3}b^{1/3}\right) = 2ay\left(x + 4a^{1/3}b^{2/3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a^{1/3}x - 2b^{1/3}y + 4a^{2/3}b^{2/3} = 0$$

6.6 ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನ ಕೊಡುಗೆ

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ ಏಕೈಕ ಗಣಿತಜ್ಞನೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ಕರ್ನಾಟಕದವನೇ ಆದ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಜೈನ ಗಣಿತಜ್ಞ **ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ** (ಕ್ರಿ.ಶ. 9ನೇ ಶತ.) ಎಂಬುದು ನಮಗೆಲ್ಲಾ ಬಹಳ ಹೆಮ್ಮೆಯ ವಿಷಯ.

ಆತನ **ಗಣಿತ-ಸಾರ-ಸಂಗ್ರಹದಲ್ಲಿ** ಮಹಾವೀರನು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ (ಆಯವೃತ್ತ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿದ್ದಾನೆ) ಪರಿಧಿಯನ್ನು $\sqrt{24b^2 + 16a^2}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಸೂತ್ರವು ಪರಿಧಿಯ ಸ್ಥೂಲವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಕೊಡುವ $2\pi r$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವಿರುವಂತೆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ನಿಖರವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಸುಲಭವಾದ ಸೂತ್ರವು ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬುದು ಗಮನಾರ್ಹ.

ಮಹಾವೀರನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಧಿಯ ಸ್ಥೂಲಬೆಲೆಯ $\sqrt{24b^2 + 16a^2}$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು bಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ದೀರ್ಘಾರ್ಧ ಮತ್ತು ಹ್ರಸ್ವಾರ್ಧ ಅಕ್ಷಗಳು.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $\pi \approx \sqrt{10}$ ಎಂಬ ಸ್ಥೂಲ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು

$$\text{ಪರಿಧಿ} \approx 2\pi a\sqrt{1 - \frac{3}{5}e^2}$$

ಎಂಬ ಸ್ಥೂಲಬೆಲೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು.

ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲು ಮಹಾವೀರನಿಗೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿ ಬಹುಶಃ ಪ್ರಾಚೀನ ಜೈನರ (ಕ್ರಿ.ಪೂ.500–ಕ್ರಿ.ಪೂ.200) ಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ "**ವಿಷಮ ಚಕ್ರವಾಳ**"ದ ಪ್ರಸ್ತಾಪದಿಂದ ದೊರಕಿರಬಹುದು.

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಹಾವೀರನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂತ್ರವು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿಲ್ಲದೆ, ಸರಿಯಾದ ಸೂತ್ರವು:

$$\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} = \pi ab$$

ನಮ್ಮ ಸೂರ್ಯಮಂಡಲದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗ್ರಹವೂ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಪಥದಲ್ಲೇ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ (ಕೆಪ್ಲರ್‌ನ ಮೊದಲನೇ ನಿಯಮ).

6.7 ಶಂಕುಜಗಳ ಸಮಾನ ಗುಣವಿಶೇಷಗಳು

1. $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ನಾಭಿ ಜ್ಯಾದ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಲಂಬಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಪೆರಾಬೊಲಾದ ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜ್ಯಾದ ತುದಿಗಳು A ಮತ್ತು B ಆಗಿದ್ದು ಅವುಗಳನ್ನು t_1 ಮತ್ತು t_2 ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಅಂದರೆ $A \equiv (at_1^2, 2at_1)$ ಮತ್ತು $B \equiv (at_2^2, 2at_2)$

AB ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - 2at_1 = \frac{2at_2 - 2at_1}{at_2^2 - at_1^2}(x - at_1^2)$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಮೀಕರಣ:

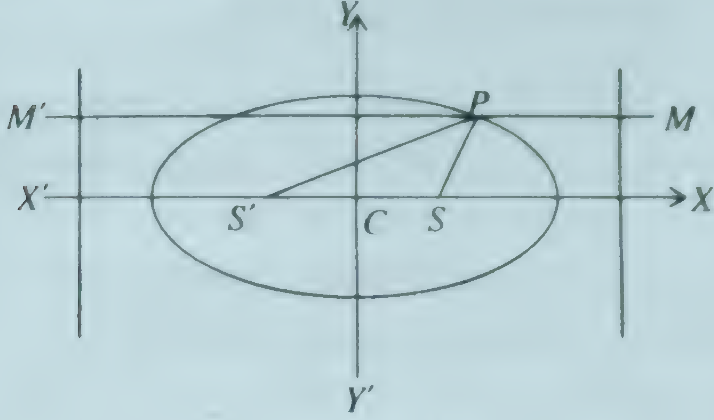
$$y(t + t_1) = 2x + 2at_1t_2$$

ಜ್ಯಾ AB ಯು ನಾಭಿಯಿಂದು $(a,0)$ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$0 = 2a + 2at_1t_2 \Rightarrow t_1t_2 = -1 \quad \ldots(1)$$

A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಓಟವು $\frac{1}{t_1}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{t_2}$ ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ (1)ರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ.

2. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿದೂರಗಳ ಸಂಕಲನವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.18

ಚಿತ್ರ 6.18ರಲ್ಲಿ $S.S'$ ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ, P ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರಗೆ

$$\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow SP = ePM$$

$$\frac{S'P}{PM'} = e \Rightarrow S'P = ePM'$$

$$SP + S'P = e(PM + PM')$$

$$= eMM' = e \times [\text{ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ}]$$

$$\therefore \quad SP + S'P = e\left(\frac{2a}{e}\right) = 2a$$

i.e. **$SP + S'P = 2a$, ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ**

3. ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಲಂಬ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ (ಡೈರಕ್ಟಾರ್ ವೃತ್ತ).

$P(x_1, y_1)$ ಲಂಬ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು (x_1, y_1) ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$y_1=mx_1\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$\Rightarrow (y_1-mx_1)^2=a^2m^2+b^2$$

$$\Rightarrow (x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+y_1^2-b^2=0$$

ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ m ನ ಎರಡು ಮೌಲ್ಯಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಓಟವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈಗ $m_1m_2=\frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}$

ಇದರ ಬೆಲೆಯು -1ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $x_1^2-a^2=-y_1^2+b^2$ ಅಥವಾ $x_1^2+y_1^2=a^2+b^2$.

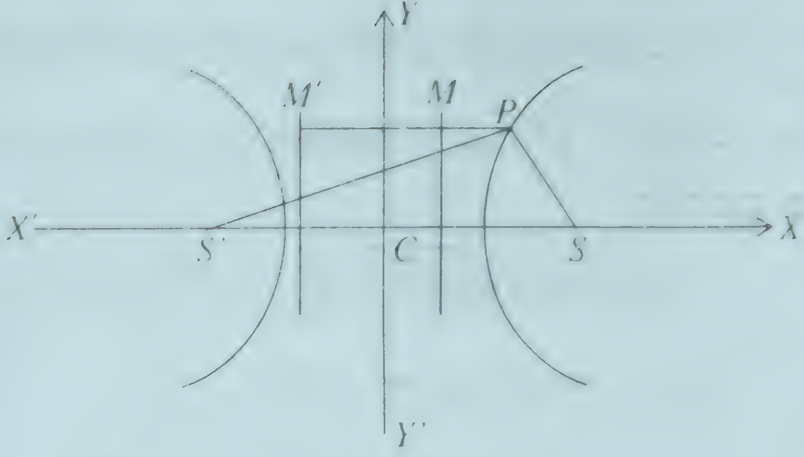
ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ (x_1, y_1) ಬದಲಿಗೆ (x, y) ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $x^2+y^2=a^2+b^2$ ಎಂದು $P(x, y)$ ನ ಬಿಂದುಪಥ ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು **"ಡೈರೆಕ್ಟರ್ ವೃತ್ತ"** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು (0, 0) ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು $\sqrt{a^2+b^2}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

4. ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿದೂರಗಳ ವ್ಯವಕಲನವು ಛೇದಕ ಅಕ್ಷದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದು.

ಚಿತ್ರ 6.19ರಲ್ಲಿ $P(x, y)$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$$\frac{SP}{PM}=e \Rightarrow SP=ePM$$



ಚಿತ್ರ 6.19

$$\frac{S'P}{PM'} = e \Rightarrow S'P = ePM'$$

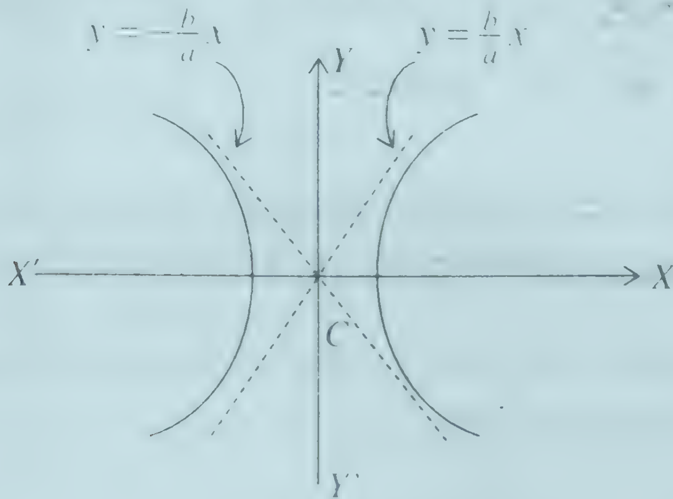
$$S'P - SP = e(PM' - PM)$$

$$= eMM' = e \times [\text{ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ}]$$

ಆದ್ದರಿಂದ $S'P - SP = e\left(\frac{2a}{e}\right)$

ಅಥವಾ $\mathbf{S'P - SP = 2a}$, ಛೇದಕ ಅಕ್ಷ.

5. **ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕ:** ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾವನ್ನು ಅನಂತದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ **ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.



ಚಿತ್ರ 6.20

ಹೈಪರ್ ಬೊಲಾ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ಮತ್ತು $y=mx+c$

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow x^2(b^2-a^2m^2)-2ma^2cx-a^2c^2-a^2b^2=0$$

ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಮೂಲಗಳು ಅನಂತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$b^2-a^2m^2=0$ ಮತ್ತು $ma^2c=0$

$\therefore$ $m=\pm\frac{b}{a}$ ಮತ್ತು $c=0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, $y=\pm\frac{b}{a}x$

ಅಂದರೆ $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ ಮತ್ತು $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ (ಚಿತ್ರ 6.20)

ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಮೀಕರಣವು $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0}$.

6. **ಆಯುತ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ:** ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾವನ್ನು **ಆಯುತ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ** (ರೆಕ್ಟಾಂಗುಲರ್ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ)ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

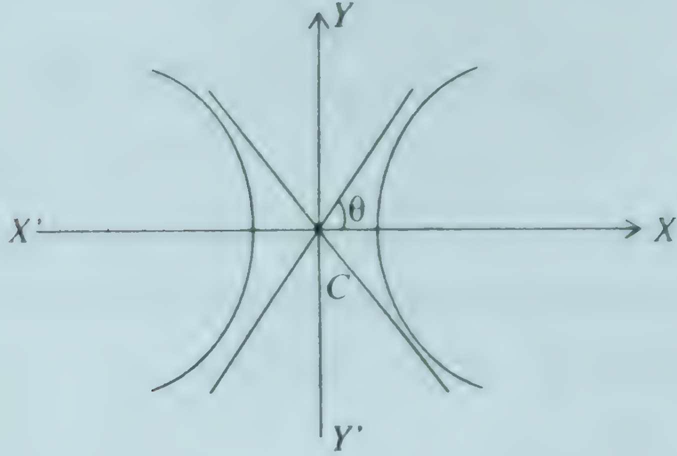
ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $y=\pm\frac{bx}{a}$. ಇವುಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವಾಗ, $\left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$

$$\Rightarrow a^2=b^2 \text{ ಅಥವಾ } a=b$$

ಆದ್ದರಿಂದ **ಆಯುತ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು**

$$\boldsymbol{x^2-y^2=a^2}$$

7. ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ:



ಚಿತ್ರ 6.21

ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, $y = \pm\frac{b}{a}x$

ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು x–ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಸಮನಾಗಿ ಬಾಗಿವೆ.

ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ನಡುವಿನ ಕೋನ 2θ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 6.21).

ಆಗ $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\therefore \quad \sec^2\theta = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = e^2$

$\therefore \quad \sec\theta = e$

ಅಥವಾ, ಎರಡು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ = $\mathbf{2\sec^{-1}(e)}$

8. e_1 ಮತ್ತು e_2 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ ಮತ್ತು ಕಾಂಜುಗೇಟ್ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಗಳ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಗಳಾದಲ್ಲಿ $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಮತ್ತು ಅದರ ಕಾಂಜುಗೇಟ್ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $e_1 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} \Rightarrow e_1^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2}$

ಮತ್ತು $e_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} \Rightarrow e_2^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

ಅಥವಾ $\mathbf{\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1}$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.4

1. $y^2 + 4x = 0$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ $(-1, -2)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $2x + 3y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $y^2 = 8x$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $y^2 = 6x$ ಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $3x - 2y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $(2, 5)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y^2 = 8x$ ಪೆರಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{24} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ $(3, -4)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $2x + y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $3x+y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\frac{(x-1)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ (6. 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಿಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $4x^2-9y^2=36$ ಈ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ನಾಭಿಲಂಬದ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $2x+y-3=0$ ಸರಳರೆಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{5}=1$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. k ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $3y=2x+k$. $y^2=4ax$ ಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು.

12. $4y-x+3=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ $y^2=7x$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $y^2=4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ನಾಭಿಲಂಬದ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $4y=5x+7$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ, ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ $4x^2-9y^2=1$ ಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

> "ಜೀವನವು ಕೇವಲ ಎರಡು ಕಾರಣಗಳಿಗೋಸ್ಕರವಾಗಿ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ – ಗಣಿತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಮತ್ತು ಗಣಿತವನ್ನು ಬೋಧಿಸುವುದು"
>
> – ಸೈಮನ್ ಡಿನಿಸ್ ಪಾಯ್ಸಾನ್

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ಪ್ರತಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

$x = f(y)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು $y = f^{-1}(x)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು **ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

7.1 ಪ್ರತಿಲೋಮ sine ಉತ್ಪನ್ನ ($\sin^{-1}x$)

$x = \sin y$ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ಎಂಬ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $-1 \le x \le 1$ ಎಂಬ ಬಿಂಬಗಣದಲ್ಲಿ ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ yಯನ್ನು xನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಇದನ್ನು $\sin^{-1}x$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, $x = \sin y \Rightarrow y = \sin^{-1}x$

xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ yಯ ಬೆಲೆಯು $\frac{-\pi}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ ಬೆಲೆಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಅದನ್ನು $\sin^{-1}x$ನ **ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $\frac{\pi}{3}$

(ii) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $-\frac{\pi}{3}$

(iii) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $-\frac{\pi}{6}$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ x ಧನಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\sin^{-1}x$ ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ x ಋಣಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\sin^{-1}x$ ಬೆಲೆಯು $-\frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು 0ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಲೋಮ sineನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು ಅಂದರೆ $\sin^{-1}x$ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು $\left[-\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}\right]$ ಅಂತರದಲ್ಲಿದ್ದು ಸಾಂಖ್ಯಿಕವಾಗಿ ಕನಿಷ್ಠವಾದ ಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

7.2 ಪ್ರತಿಲೋಮ cosine ಉತ್ಪನ್ನ ($\cos^{-1}x$)

$x=\cos y$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಕ್ಷೇತ್ರವು $0\le y\le\pi$ ಮತ್ತು ಬಿಂಬ ಗಣವು $-1\le x\le 1$ ಆದಾಗ ಇದು ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ yನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮ cosine($\cos^{-1}$) ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $x=\cos y \Rightarrow y=\cos^{-1}x$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ x ಧನಾತ್ಮಕವಾದಾಗ, $\cos^{-1}x$ವು ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗ ಇನ್ನೊಂದು ಬೆಲ $-\frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು 0ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ಹಾಗೂ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ ಅಥವಾ $-\frac{\pi}{3}$ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಇಂಥಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ಸಂಖ್ಯೆ x ಋಣಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\cos^{-1}x$ದ ಬೆಲೆಯು $\frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು πಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. x ಧನಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\cos^{-1}x$ದ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಲೋಮ cosineನ (ಅಂದರೆ $\cos^{-1}$)ನ ಪ್ರಧಾನ **ಬೆಲೆ**ಯು $[0, \pi]$ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

7.3 ಪ್ರತಿಲೋಮ tangent ಉತ್ಪನ್ನ ($\tan^{-1}x$)

$x = \tan y$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಕ್ಷೇತ್ರವು $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ಹಾಗೂ ಬಿಂಬಗಣವು $-\infty < x < \infty$ ಆದಾಗ ಇದು ಏಕಮೌಲ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ yನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮ tangent ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$x = \tan y \Rightarrow y = \tan^{-1} x$$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ x ಧನಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\tan^{-1}x$ದ ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ ಮತ್ತು } \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

ಅಂದರೆ, $\tan^{-1}$ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\operatorname{cosec}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ ಮತ್ತು $\cot^{-1}x$ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

1. (i) $\sec^{-1}(-2)$ (ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}(\tan(260^0))]$

   (iv) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (v) $\cot^{-1}[\cot(-740^0)]$

(i) $\sec^{-1}(-2) = \sec^{-1}(2) = \frac{\pi}{3}$

(ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right) = -\operatorname{cosec}^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

(iii) $\tan^{-1}[(\tan(260^0)]$

$$= \tan^{-1}[\tan(180^0 + 80^0)] = \tan^{-1}[\tan 80^0] = 80^0$$

(iv) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

(v) $\cot^{-1}[\cot(-740^0)]$

$$= \cot^{-1}[-\cot 740^0]$$

$$= -\cot^{-1}[\cot(720^0 + 20^0)]$$

$$= -\cot^{-1}[\cot 20^0] = -20^0$$

2. $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1} x = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad x = \sin\theta$

ಈಗ, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \quad \cos\theta = 1 - x^2$

ಅಥವಾ $\theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore \quad \sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$$

ಈಗ, $x = \sin\theta$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

ಅಂದರೆ, $\tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

ಅಥವಾ $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$\therefore \quad \sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1} x = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore \quad x = \sin\theta$

ಅಥವಾ $x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ i.e., $\dfrac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1} x$

ಅಥವಾ $\theta + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

ಅಂದರೆ. $\boldsymbol{\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}}$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\tan^{-1} x + \cot^{-1} = \frac{\pi}{2}$

ಮತ್ತು $\sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

4. $\sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sec^{-1} x = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ $\quad \therefore \quad x = \sec\theta$

ಅಥವಾ $\frac{1}{x} = \cos\theta \quad \therefore \quad \cos^{-1} \frac{1}{x} = \theta$

ಅಂದರೆ, $\sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $\tan^{-1} x = \cot^{-1} \frac{1}{x}$

ಮತ್ತು $\text{cosec}^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{x}$

5. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\cos^{-1}(-x) = \alpha$ ಆಗಿರಲಿ $\quad \therefore \quad -x = \cos\alpha$

ಅಥವಾ $x = -\cos\alpha$ ಅಥವಾ $x = \cos(\pi - \alpha)$

$\therefore \quad \cos^{-1} x = \pi - \alpha$ ಅಥವಾ $\alpha = \pi - \cos^{-1} x$

$\therefore \quad \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $\sin^{-1}(-x) - \sin^{-1} x$

ಮತ್ತು $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

ಸೂಚನೆ: $\sin^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right) \neq \cos^{-1}\frac{12}{13}$

$$\sin^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right) = -\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$$

ಆದರೆ $\sin^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right)$

6. $x \geq 0$, $y \geq 0$ ಮತ್ತು $xy < 1$ ಆದಾಗ

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $2\tan^{-1}x$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\tan^{-1}x = \alpha$ ಮತ್ತು $\tan^{-1}y = \beta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore\ x = \tan\alpha$ ಮತ್ತು $y = \tan\beta$

ಈಗ, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{x+y}{1-xy}$

ಅಥವಾ $\alpha+\beta = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

ಅಂದರೆ, $\mathbf{\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}}$

(ಇಲ್ಲಿ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ಮತ್ತು $xy < 1$)

(ii) ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $x = y$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{(x+x)}{1-xx}$$

ಅಥವಾ $\mathbf{2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

7. $x \geq 0$ ಮತ್ತು $y \geq 0$ ಆದಾಗ $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{(x-y)}{1+xy}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\tan^{-1} x = \alpha$ ಮತ್ತು $\tan^{-1} y = \beta$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad x = \tan\alpha$ ಮತ್ತು $y = \tan\beta$

ಈಗ, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{x-y}{1+xy}$

ಅಥವಾ $\alpha - \beta = \tan^{-1} \frac{(x-y)}{1+xy}$

ಅಥವಾ $\mathbf{\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}}$

8. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1} x = \alpha$ ಮತ್ತು $\sin^{-1} y = \beta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad x = \sin\alpha$ ಮತ್ತು $y = \sin\beta$

ಈಗ, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\sin(\alpha + \beta) = x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}\,y$

$\therefore \quad \alpha + \beta = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$

ಅಥವಾ $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$

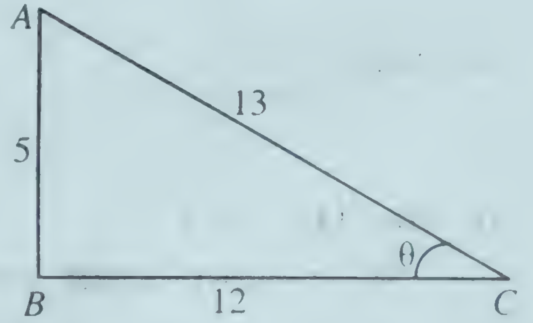
9. $\sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{1}{25} = \cos^{-1}\frac{253}{325}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1}\frac{5}{13} = \theta$ ಮತ್ತು $\sin^{-1}\frac{1}{25} = \phi$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{5}{13} = \sin\theta$ ಮತ್ತು $\frac{7}{25} = \sin\phi$

ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $AB = 5$ ಮತ್ತು $AC = 13$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.1)

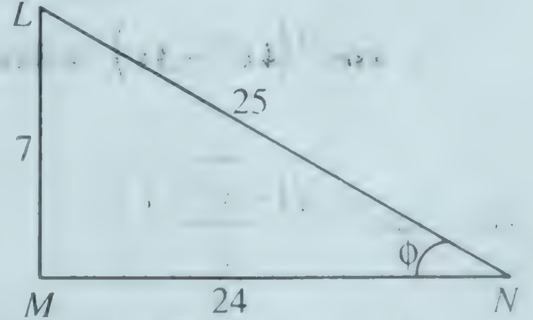
$\therefore \cos\theta = \frac{12}{13}$



ಚಿತ್ರ 7.1

LMN ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $LM = 7$ ಮತ್ತು $LN = 25$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.2)

$\therefore \cos\phi = \frac{24}{25}$



ಚಿತ್ರ 7.2

ಈಗ, $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$

$$= \frac{12}{13}\cdot\frac{24}{25} - \frac{5}{13}\cdot\frac{7}{25} = \frac{288-35}{325} = \frac{253}{325}$$

$$\therefore \quad \theta + \phi = \cos^{-1}\frac{253}{325}$$

ಅಥವಾ $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{1}{25}=\cos^{-1}\frac{253}{325}$

10. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಆದೇಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸರಳೀಕರಿಸಿ.

(i) $\cos^{-1}(4x^3-3x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

(iii) $\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ (iv) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

(v) $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

(i) $\cos^{-1}(4x^3-3x)$

ಇಲ್ಲಿ $x=\cos\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\cos^{-1}(4x^3-3x)=\cos^{-1}(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$=\cos^{-1}(\cos 3\theta) \quad =3\theta$$

$$\therefore \ \mathbf{\cos^{-1}(4x^3-3x)=3\cos^{-1}x}$$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

$x=\tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right) \quad =\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) \qquad = \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) \quad = \frac{\theta}{2} \quad = \frac{1}{2}\theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x}$$

(iii) $\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}(\sin 2\theta) \quad = \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} x}$$

(iv) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ.

$$\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sec\theta}{\tan\theta}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec}\theta) \quad = \theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{cosec^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = tan^{-1}\, x}$$

(v) $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right] = \frac{\pi}{4} - \theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - tan^{-1}\, x}$$

11. $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1} x^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\text{LHS} = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})^2}{1+x^2-(1-x^2)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1+x^2+1-x^2+2\sqrt{1-x^4}}{2x^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2+2\sqrt{1-x^4}}{2x^2}\right] \quad = \tan^{-1}\left[\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}\right]$$

ಇಲ್ಲಿ $x^2 = \sin\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}\right] \quad = \tan^{-1}\left[\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right] \quad = \tan^{-1}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad = \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin^{-1}x^2$$

$$= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x^2\right] \quad [\because \sin^{-1}x^2+\cos^{-1}x^2=\frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2 \quad = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2}$$

12. $\tan^{-1}\frac{120}{119} = 2\sin^{-1}\frac{5}{13}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1}\frac{5}{13}=\alpha$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{5}{13}=\sin\alpha \qquad \therefore \ \tan\alpha=\frac{5}{12}$

(ಚಿತ್ರ 7.1ರಲ್ಲಿ θ ಬದಲಿಗೆ α ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ).

ಈಗ, $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \tan 2\alpha=\frac{2\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\frac{25}{144}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{144}{119}=\frac{120}{119}$$

$$\therefore \quad 2\alpha=\tan^{-1}\frac{120}{119}$$

ಅಂದರೆ, $2\sin^{-1}\frac{5}{13}=\tan^{-1}\frac{120}{119}$

13. $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\text{LHS} = 2\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)-\left[\tan^{-1}\frac{1}{70}-\tan^{-1}\frac{1}{99}\right]$$

$$=2\tan^{-1}\left(\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{70}-\frac{1}{99}}{1+\frac{1}{99}\cdot\frac{1}{70}}\right)$$

$$=2\tan^{-1}\frac{5}{12}-\tan^{-1}\frac{29}{6931}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right) - \tan^{-1}\frac{29}{6931}$$

$$= \tan^{-1}\frac{120}{119} - \tan^{-1}\frac{99}{6931}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{29}{6931}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{29}{6931}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{828269}{828269} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

14. $2\tan^{-1}\left[\left[\frac{a-b}{a+b}\right]^{1/2}\tan\frac{x}{2}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right]$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\tan^{-1}\left[\left[\frac{a-b}{a+b}\right]^{1/2}\tan\frac{x}{2}\right] = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \quad \left[\frac{a-b}{a+b}\right]^{1/2}\tan\frac{x}{2} = \tan\theta$$

ಈಗ, $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \cos 2\theta = \frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(a+b)-(a-b)\tan^2\frac{x}{2}}{(a+b)+(a-b)\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{a+b-(a-b)\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{a+b+(a-b)\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}-(a-b)\sin^2\frac{x}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{a\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

ಅಂದರೆ, $\cos 2\theta=\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}$

$$\therefore \quad 2\theta=\cos^{-1}\left[\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right]$$

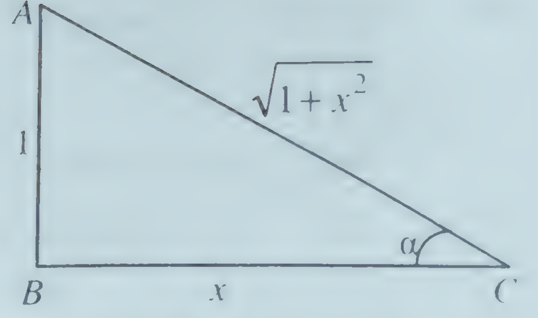
ಅಥವಾ $2\tan^{-1}\left[\left[\frac{a-b}{a+b}\right]^{1/2}\tan\frac{x}{2}\right]=\cos^{-1}\left[\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right]$

15. $\cos[\tan^{-1}\{\sin(\cot^{-1}x)\}]=\left[\frac{x^2+1}{x^2+2}\right]^{1/2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\cot^{-1}x=\alpha$ ಎಂದಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, $x=\cot\alpha$

$\Delta^{le} ABC$ಯಲ್ಲಿ $BC = x$.

$AB = 1$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.3).



ಚಿತ್ರ 7.3

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ

$$\text{LHS} = \cos\left[\tan^{-1}\sin\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right\}\right]$$

$$= \cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad = \cos\cos^{-1}\left[\frac{1+x^2}{2+x^2}\right]$$

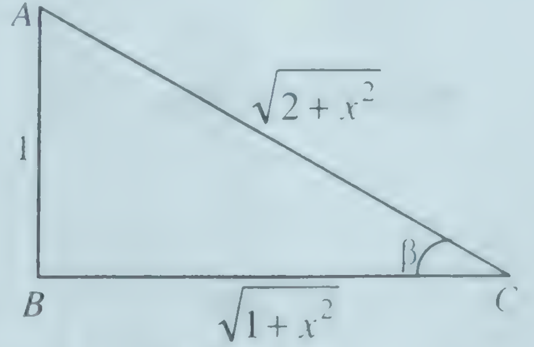
$\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \beta$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.4)

$$\therefore \quad \tan\beta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Delta^{le} ABC$ ಯಲ್ಲಿ $AB = 1$ ಮತ್ತು

$BC = \sqrt{1+x^2}$ ಎಂದು

ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,



ಚಿತ್ರ 7.4

ಆಗ $AC = \sqrt{2+x^2}$

$$\therefore \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \beta = \cos^{-1}\left[\frac{1+x^2}{2+x^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos^{-1}\left[\frac{x^2+1}{x^2+2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

16. $\cos\left[2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right]=\sin\left[4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\tan^{-1}\frac{1}{7}=\alpha$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \quad \text{LHS}=\cos\left[\tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right]$$

[ಏಕೆಂದರೆ $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$]

$$=\cos\left[\tan^{-1}\frac{7}{24}\right]$$

$$=\cos\left[\cos^{-1}\frac{24}{25}\right]=\frac{24}{25} \qquad ...(1)$$

$$RHS=\sin\left[2\left(2\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$=\sin\left[2\tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right]=\sin\left[2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right]$$

$$=\sin\left[\tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}\right]=\sin\left[\tan^{-1}\frac{24}{7}\right]$$

$$=\sin\left[\sin^{-1}\frac{24}{25}\right]=\frac{24}{25} \qquad ...(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

17. $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$ ಎಂದಿದ್ದರೆ

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\cos^{-1}\frac{x}{a}=\theta$ ಮತ್ತು $\cos^{-1}\frac{y}{b}=\phi$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{x}{a}=\cos\theta$ ಮತ್ತು $\frac{y}{b}=\cos\phi$

ಈಗ $\theta+\phi=\alpha$ (ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ)

$\therefore\ \cos(\theta+\phi)=\cos\alpha$

ಅಂದರೆ $\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi=\cos\alpha$

ಅಥವಾ $\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}-\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]^{1/2}\left[1-\frac{y^2}{b^2}\right]=\cos\alpha$

$\therefore\ \left(\cos\alpha-\frac{xy}{ab}\right)^2=\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]\left[1-\frac{y^2}{b^2}\right]$

ಅಂದರೆ, $\cos^2\alpha+\frac{x^2y^2}{a^2b^2}\frac{2xy}{ab}\cos\alpha=1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2y^2}{a^2b^2}$

ಅಥವಾ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha=1-\cos^2\alpha$

$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy\cos\alpha}{ab}=\sin^2\alpha$

18. $\tan^{-1}x = 2\tan^{-1}[\operatorname{cosec}(\tan^{-1}x) - \tan(\cot^{-1}x)]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\tan^{-1}x = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad x = \tan\theta$

ಅಥವಾ $x = \cot\left[\frac{\pi}{2} - \theta\right]$ ಅಥವಾ $\cot^{-1}x = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$\text{RHS} = 2\tan^{-1}\left[\operatorname{cosec}\theta - \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= 2\tan^{-1}[\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta]$$

$$= 2\tan^{-1}\left[\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left[\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\frac{\theta}{2} = \theta = \tan^{-1}x = \text{LHS}$$

7.4 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

1. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

$\sin^{-1} = \alpha$ ಮತ್ತು $\sin^{-1}2x = \beta$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $x = \sin\alpha$ ಮತ್ತು $2x = \sin\beta$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{\pi}{3}$$

ಅಥವಾ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}-x\cdot 2x=\frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}=\frac{1}{2}+2x^2$

ಅಥವಾ $(1-x^2)(1-4x^2)=\left[\frac{1}{2}+2x^2\right]^2$

ಅಂದರೆ, $1-4x^2-x^2+4x^4=\frac{1}{4}+4x^4+2x^2$

$\therefore\quad 7x^2=\frac{3}{4}$ ಅಥವಾ $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

2. $\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\tan^{-1}(-7)$ ಬಿಡಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{1-\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x}}\right)=\tan^{-1}(-7)$$

ಎಂದು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ

$$\frac{2x^2-x+1}{1-x}=-7$$

ಅಥವಾ $2x^2-8x+8=0$ ಅಥವಾ $x^2-4x+4=0$

ಅಂದರೆ, $(x-2)^2=0\qquad\therefore\quad x=2$

3. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\alpha$ ಬಿಡಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಿಂದಾಗಿ

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ "ಕಾಂಪ್ಪೊನೆಂಡೊ–ಏಟ್–ಡಿವಿಡೆಂಡೊ" ನಿಯಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{2\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=\left(\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2$

ಅಥವಾ $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $x^2=\sin 2\alpha$ ಅಥವಾ $x=\pm\sqrt{\sin 2\alpha}$

4. $\sin\left[2\cos^{-1}\cot(2\tan^{-1}x)\right]=0$ ಬಿಡಿಸಿ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\sin\left[2\cos^{-1}\cot\left(\cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x}\right)\right]=0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $\sin\left[2\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x}\right]=0$ ...(1)

ಈಗ $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{2x}=\alpha$ ಎಂದಿರಲಿ

ಅಂದರೆ, $\frac{1-x^2}{2x}=\cos\alpha$ ...(2)

$\therefore \quad 2\cos^{-1}\frac{1-x^2}{2x}=2\alpha$

ಈಗ, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \quad \cos 2\alpha = 2\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2 - 1$ [(2)ರಿಂದ]

ಅಥವಾ $\cos 2\alpha = \frac{1+x^4-4x^2}{2x^2}$

$\therefore \quad 2\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1+x^4-4x^2}{2x^2}\right)$

ಅಥವಾ $2\cos^{-1}\frac{1-x^2}{2x} = \cos^{-1}\frac{1+x^4-4x^2}{2x^2}$ ...(3)

(3)ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\sin\left[\cos^{-1}\frac{x^4-4x^2+1}{2x^2}\right]=0$$

ಅಥವಾ $\sin\left[\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{x^4-4x^2+1}{2x^2}\right)^2}\right]=0$

ಅಥವಾ $4x^4-(x^4-4x^2+1)^2=0$

ಅಥವಾ $(x^4-6x^2+1)(x^4-2x^2+1)=0$

ಅಂದರೆ, $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ ಅಥವಾ $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

ಅಂದರೆ, $x^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$ ಅಥವಾ $(x^2 - 1)^2 = 0$

ಅಂದರೆ, $x^2 = (1 \pm \sqrt{2})^2$ ಅಥವಾ $x = \pm 1$

ಅಂದರೆ, $x = \pm(1 \pm \sqrt{2})$ ಅಥವಾ $x = \pm 1$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \pm 1, \ \pm(1 \pm \sqrt{2})$

5. $\cot^{-1} x + \cot^{-1} 2x = \frac{3\pi}{4}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\tan^{-1}\frac{1}{x} + \tan^{-1}\frac{1}{2x} = \frac{3\pi}{4}$$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}}{1 - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2x}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{2x}}{\frac{2x^2-1}{2x^2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{3x}{2x^2-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{3x}{2x^2-1} = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{3x}{2x^2-1} = -1 \qquad \therefore \quad 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} \qquad = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

6. $3\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}-4\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}+2\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{3}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $x=\tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$3\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)-4\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$3\sin^{-1}(\sin 2\theta)-4\cos^{-1}(\cos 2\theta)+2\tan^{-1}(\tan 2\theta)=\frac{\pi}{3}$$

$$6\theta-8\theta+4\theta=\frac{\pi}{3}$$

$$2\theta=\frac{\pi}{3} \qquad \text{i.e.} \quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \qquad \tan\theta=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ಆದರೆ $x=\tan\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ $\therefore \quad x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. $\sin^{-1}6x+\sin^{-1}6\sqrt{3}x=-\frac{\pi}{2}$ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

$\sin^{-1}6x=-\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}6\sqrt{3}x\right)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು

$$6x=-\sin\left[\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}6\sqrt{3}x\right]$$

$$=-\cos\left[\sin^{-1}6\sqrt{3}x\right]$$

$$=-\cos^{-1}\left[\cos^{-1}\sqrt{1-108x^2}\right]$$

$$6x = -\sqrt{1-108x^2}$$

$\therefore \quad 36x^2 = 1-108x^2$ ಅಥವಾ $144x^2 = 1$

$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{12}$

ಆದರೆ x ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಬೇಕು. $\therefore \quad x = -\frac{1}{12}$

ಅಭ್ಯಾಸ 7

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\sin^{-1}(-1)$
2. $\cos^{-1}[\cos 600^0]$
3. $\cos^{-1}(\sin 225^0)$
4. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$
5. $\sin\left[2\sin^{-1}\frac{4}{5}\right]$
6. $\sin^{-1}\frac{1}{x} + \cos^{-1}\frac{1}{x}$
7. $\cos^{-1}\frac{1}{5\sqrt{2}} - \sin^{-1}\frac{4}{\sqrt{17}}$
8. $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$
9. $\cos^{-1}(\sin 220^0)$
10. $\sin^{-1}[\cos(-105^0)]$
11. $\sin\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$
12. $\sin(\tan^{-1} 2)$
13. $\cot^{-1}(\tan 100^0)$
14. $\cos\left[\cos^{-1}\frac{15}{17} - \cos^{-1}\frac{7}{25}\right]$
15. $\tan\sin^{-1}\left[-\frac{1}{2}\right]$
16. $\sin\left[2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]$
17. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
18. $\cos^{-1}\cos 350^0 - \sin^{-1}\sin 350^0$

19. $\tan\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$ 20. $\sec^{-1}\sqrt{3}+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{3}$

21. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3$ 22. $\sec\left[2\tan^{-1}\frac{3}{2}\right]$

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಸಾಧಿಸಿ.

1. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$

2. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

3. $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{41}}{4}=\frac{\pi}{4}$

4. $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

5. $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

6. $\tan\alpha=\frac{1}{7},\ \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\alpha>0,\beta>\frac{\pi}{2}\right)$ ಆದಾಗ $2\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

8. $\tan^{-1}\frac{1}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

9. $\tan^{-1}\left(\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3}$

10. $\tan^{-1}\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{12}{5}$

11. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$

12. $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$

13. $\tan(2\tan^{-1}x)=2\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^3)$

14. $\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right)=0$

15. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ ಆದಾಗ $x+y+z=xyz$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $\sec^{-1}\sqrt{1+x^2}+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}+\cot^{-1}\frac{1}{z}=3\pi$

17. $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ ಆದಾಗ $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

19. $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}=2\cos^{-1}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}$

20. $\cos^{-1}\frac{3}{4}=\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{4}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{4}{\sqrt{7}}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}$

21. $\cos^{-1}\cos(-585^0)-\tan^{-1}(-\sqrt{3})=\frac{13\pi}{12}$

22. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$

23. $2\cot^{-1}7+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{125}{117}$

24. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}=0$

25. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\cot^{-1}8=\frac{\pi}{4}$

26. $\sin^2\left[\cot^{-1}\left\{\cos\left(\tan^{-1}x\right)\right\}\right]=\frac{x^2+1}{x^2+2}$

27. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-x$

28. $\sin^{-1}\frac{16}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\cos^{-1}\frac{14}{5}$

29. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\cot^{-1}\frac{2}{11}$

30. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

31. $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\tan^{-1}\frac{3}{5}=\cot^{-1}\frac{29}{3}$

32. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}-\cot^{-1}\frac{1}{3}=\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

33. $\cos^{-1}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$

34. $\sin^{-1}x=\alpha+\beta,\ \sin^{-1}y=\alpha-\beta$
ಆದಾಗ $1+xy=\sin^2\alpha+\cos^2\beta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

III. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

1. $\sin^{-1}\frac{5}{x}+\sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$

2. $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$

3. $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

4. $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=\frac{2\pi}{3}$

5. $\sin^{-1}2x-\sin^{-1}x\sqrt{3}=\sin^{-1}x$

6. $2\cot^{-1}5+2\cot^{-1}8+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{4}$

7. $\cot^{-1}x+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{4}$

8. $\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

9. $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

10. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x-1)=\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$

11. $\cos^{-1}(2x^2-1)=2\cos^{-1}\frac{1}{2}$

12. $\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{4}-\sin^{-1}x$

13. $\tan^{-1}x-\tan^{-1}\frac{9}{7}=\tan^{-1}(x-1)$

14. $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\cos^{-1}(\sqrt{3}x)$

15. $\tan^{-1}(x+1)-\tan^{-1}(x-1)=\cot^{-1}2$

16. $\cos^{-1}x=\cot^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

17. $\tan^{-1}x-\cot^{-1}x=0$

18. $\sec^{-1}x-\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{6}$

ಅಧ್ಯಾಯ 8

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು

8.1 ಪೀಠಿಕೆ

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಅನೇಕ ಬಾರಿ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎದುರಾಗುವುವು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $4\sin x + 3\cos x = 5$

$$\tan^2 x + \sec x = 2$$

ಎಂಬುವು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

ಈಗ, $\cos x = \frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ, $x = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಆದರೆ, $x = \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$

ಬೆಲೆಗಳೂ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರವಾಗುತ್ತವೆ.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ (ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ) ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

8.2 $\sin x = k,\ -1 \le k \le 1,$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$$\sin x = k \qquad \text{...(1)}$$

ಸಮೀಕರಣದ ಅತಿ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವು α ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \qquad \sin x = \sin\alpha$$

ಅಥವಾ $\sin x - \sin\alpha = 0$

ಅಥವಾ $2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2} = 0$

$\therefore \quad \cos\frac{x+\alpha}{2} = 0$ ಅಥವಾ $\sin\frac{x-\alpha}{2} = 0$

$\therefore \quad \frac{x+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ಅಥವಾ $\frac{x-\alpha}{2} = 2n\frac{\pi}{2}$

ಅಂದರೆ, $x = (2n+1)\pi - \alpha$ ...(2)

ಇಲ್ಲಿ $(2n+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\ldots$ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಅಥವಾ $x = 2n\pi + \alpha$ ...(3)

ಇಲ್ಲಿ $2n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\ldots$ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಈಗ, (2) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಸಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$\boldsymbol{x = n\pi + (-1)^n \alpha}$ (ಇಲ್ಲಿ $n \in I$, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ)

8.3 $\cos x = k$, $-1 \le k \le 1$, ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$\cos x = k$ ...(1)

ಸಮೀಕರಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವು α ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad \cos x = \cos\alpha$

ಅಥವಾ $\cos x - \cos\alpha = 0$

ಅಥವಾ $-2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{x-\alpha}{2} = 0$

$\therefore \quad \sin\frac{x+\alpha}{2} = 0$ ಅಥವಾ $\sin\frac{x-\alpha}{2} = 0$

$$\therefore \quad \frac{x+\alpha}{2} = 2n\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \frac{x-\alpha}{2} = 2n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ಅಂದರೆ, $x = 2n\pi - \alpha$ ...(2)

ಅಥವಾ $x = 2n\pi + \alpha$ ...(3)

ಈಗ, (2) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ನಾವು ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\boldsymbol{x = 2n\pi \pm \alpha} \quad (n \in I)$$

8.4 $\tan x = k, -\infty < k < \infty$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$$\tan x = k \qquad ...(1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವು α ಆಗಿರಲಿ

$\therefore$ $\tan x = \tan\alpha$

ಅಥವಾ $\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

ಅಥವಾ $\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha = 0$

ಅಂದರೆ, $\sin(x-\alpha) = 0$

$\therefore$ $x - \alpha = n\pi$

ಅಥವಾ $\boldsymbol{x = n\pi + \alpha}$, $(n \in I)$

ಎಂಬುದು (1)ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

ಸೂಚನೆ:

(1) $\sin x$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec} x$
$\cos x$ ಮತ್ತು $\sec x$
$\tan x$ ಮತ್ತು $\cot x$

ಈ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) $\cos x + \sin y = 0 \quad \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$

$$\text{ಆಗ} \quad x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + y\right)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\cos x = \sin y \quad \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$$\text{ಆಗ} \quad x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

ಇದೇ ನಿಯಮವು $\tan x + \cot y = 0$ ಮತ್ತು $\tan x = \cot y$ ಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

8.5 $a\cos x + b\sin x = c$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$$a\cos x + b\sin x = c \qquad \ldots(1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು $\sqrt{a^2 + b^2}$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \ldots(2)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ಅಥವಾ $\cos(x - \beta) = k$ ಇಲ್ಲಿ $\left[k = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

ಈಗ, α ವು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನಾವು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x-\beta=2n\pi\pm\alpha$$

ಅಥವಾ $x=2n\pi\pm\alpha+\beta, \quad (n\in I)$

ಸೂಚನೆ: ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು ಸಮೀಕರಣ (2)ರಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta \text{ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ}$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.}$$

ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು

$$\sin\beta\cos x+\cos\beta\sin x=k$$

ಅಥವಾ $\sin(x+\beta)=k$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವು α ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವು

$$x+\beta=n\pi+(-1)^n\alpha$$

ಅಥವಾ $x=n\pi+(-1)^n\alpha-\beta, \quad n\in I$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, \quad (n \in I)$

2. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

(i) $\cos x = \frac{1}{2}$ ಅಥವಾ (ii) $\cos x = -\frac{1}{2}$

(i) ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (ii) ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = 2\frac{\pi}{3}$

(i) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (ii) $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ (i) ಮತ್ತು (ii) ಸೇರಿಸಿ,

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, (n \in I)$.

3. $\tan 3\theta = \cot 7\theta$

ಇದನ್ನು $\tan 3\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 7\theta\right)$ ಎಂದು ಬರೆಯುಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{\pi}{2} - 7\theta$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $3\theta = n\pi + \alpha$

$\therefore \quad 3\theta = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 7\theta$

ಅಥವಾ $\theta = \frac{1}{10}\left[n\pi + \frac{\pi}{2}\right], \quad n \in I$.

ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

4. $\cot^2\theta + \left[\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cot\theta + 1 = 0$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\left(\cot\theta+\sqrt{3}\right)\left[\cot\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]=0$

ಎಂದು ಅಪವರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆದರೆ, $\cot\theta+\sqrt{3}=0$ ಅಥವಾ $\cot\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$

$\therefore \quad \cot\theta=-\sqrt{3}$ ಅಥವಾ $\cot\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha=-\frac{\pi}{6}$ ಇಲ್ಲಿ $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta=n\pi-\frac{\pi}{6}$ $\therefore \quad \theta=n\pi-\frac{\pi}{3}$

ಈ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ,

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ: $\theta=n\pi-\frac{\pi}{6},\ n\pi-\frac{\pi}{3}\ (n\in I)$.

5. $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$(1-\cos^2\theta)-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$$

ಅಥವಾ $(-\cos^2\theta)-2\cos\theta+\frac{5}{4}=0$

ಅಥವಾ $4\cos^2\theta+8\cos\theta-5=0$

i.e. $2\cos\theta(2\cos\theta+5)-1(2\cos\theta+5)=0$

ಅಥವಾ $(2\cos\theta+5)(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore \quad 2\cos\theta+5=0$ ಅಥವಾ $2\cos\theta-1=0$

ಅಂದರೆ, $\cos\theta = -\frac{5}{2}$ ಅಥವಾ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\cos\theta$ದ ಬೆಲೆಯು -1 ಮತ್ತು 1ರ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಕಾರಣ $-\frac{5}{2}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವು $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

6. $\sin 7\theta - \sqrt{3}\cos 4\theta = \sin\theta$

ಇದನ್ನು $\sin 7\theta - \sin\theta = \sqrt{3}\cos 4\theta$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$2\cos 4\theta \sin 3\theta = \sqrt{3}\cos 4\theta$$

$$\cos 4\theta[2\sin 3\theta - \sqrt{3}] = 0$$

$\cos 4\theta = 0$ ಅಥವಾ $2\sin 3\theta - \sqrt{3} = 0$

(i) $\cos 4\theta = 0$: ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ,

$$4\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

ಅಂದರೆ $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$

(ii) $2\sin 3\theta - \sqrt{3} = 0$

$$\sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ, $3\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$

$$\theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{9}$$

7. $\tan\theta + \tan 2\theta = \tan 3\theta$

$\tan\theta + \tan 2\theta = \tan(2\theta + \theta)$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು.

$$\tan\theta + \tan 2\theta = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta}$$

$$\tan\theta + \tan 2\theta - \left(\frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta}\right) = 0$$

$$[\tan\theta + \tan 2\theta]\left[1 - \left(\frac{1}{1 - \tan 2\theta \tan\theta}\right)\right] = 0$$

$\tan\theta + \tan 2\theta = 0$ ಅಥವಾ $1 - \frac{1}{1 - \tan 2\theta \tan\theta} = 0$

(i) $\tan\theta + \tan 2\theta = 0$ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

i.e.. $\tan\theta = -\tan 2\theta$

ಅಥವಾ $\tan\theta = \tan(\pi - 2\theta)$

$$\theta = n\pi + (\pi - 2\theta)$$

$$3\theta = (n+1)\pi \quad \therefore \quad \theta = (n+1)\frac{\pi}{3}$$

ಇನ್ನು $1 - \frac{1}{1 - \tan 2\theta \tan\theta} = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$\tan 2\theta \tan\theta = 0$

(ii) $\tan 2\theta = 0$ ಅಥವಾ (iii) $\tan\theta = 0$

$\alpha = 0$ $\alpha = 0$

ಆದುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ,

(ii) $2\theta = n\pi + 0$ $\therefore$ $\theta = \frac{n\pi}{2}$

(iii) $\theta = n\pi + 0 \qquad \therefore \quad \theta = n\pi$

8. $4\cos^2\theta + \sqrt{3} = 2(\sqrt{3}+1)\cos\theta$

$4\cos^2\theta - 2(\sqrt{3}+1)\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

$\cos\theta = a$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$4a^2 - 2(\sqrt{3}+1)a + \sqrt{3} = 0$

$$\therefore \quad a = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{4(\sqrt{3}+1)^2 - 4\cdot 4\sqrt{3}}}{8}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm 2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1 \pm (\sqrt{3}-1)}{4}$$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಅಥವಾ $a = \frac{1}{2}$

ಅಂದರೆ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಅಥವಾ $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \qquad \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ಅಥವಾ $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

9. $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5$

ಇಲ್ಲಿ ಬಲಗಡೆಯಲ್ಲಿರುವ 5ನ್ನು $5\sin^2 x + 5\cos^2 x$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ ಈ ಸಮೀಕರಣವು

$5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5\sin^2 x + 5\cos^2 x$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$

ಅಥವಾ $\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = 0$

$\cos x = 0$ ಅಥವಾ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$

(i) $\cos x = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\quad x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

(ii) $\cos x = -\sqrt{3}\sin x$ $\quad\therefore\quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore\quad x = n\pi - \frac{\pi}{6}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ: $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}, \; n\pi - \frac{\pi}{6}$

10. $\operatorname{cosec} x - \cot x = 0$

$\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 0$ ಅಥವಾ $1 - \cos x = 0$

i.e., $\cos x = 1,\quad \alpha = 0 \quad\therefore\quad x = 2n\pi$

ಆದರೆ, $\sin 2n\pi = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.

11. $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

$81^{\sin^2 x} + 81^{(1-\sin^2 x)} = 30$

$a = 81^{\sin^2 x}$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$a + \frac{81}{a} = 30$ $\quad\left[\because 81^{1-\sin^2 x} = \frac{81}{81^{\sin^2 x}}\right]$

$a^2 - 30a + 81 = 0$

$(a-27)(a-3)=0$

$\therefore \quad a=27$ ಅಥವಾ $a=3$

ಅಂದರೆ (i) $81^{\sin^2 x}=27$

$$3^{4\sin^2 x}=3^3$$

$$\therefore \quad 4\sin^2 x=3$$

i.e.. $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha=\pm\frac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad x=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{3}$$

(ii) $a=3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ $81^{\sin^2 x}=3$

$$3^{4\sin^2 x}=3^1 \quad \therefore \quad 4\sin^2 x=1$$

$\therefore \quad \sin x=\pm\frac{1}{2}$. ಇಲ್ಲಿ $\alpha=\pm\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \quad x=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ: $x=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{3},\ n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{6}$

12. $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ

$$2\sin 2x=\sin x+\sin 3x$$

i.e. $2\sin 2x=2\sin 2x\cos x$

$$2\sin 2x(1-\cos x) = 0$$

$\therefore \quad \sin 2x = 0$ ಅಥವಾ $1-\cos x = 0$

(i) $\sin 2x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ i.e. $2x = n\pi + (-1)^n 0 \;\; \therefore \;\; x = \dfrac{n\pi}{2}$

(ii) $\cos x = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ i.e, $x = 2n\pi$

13. $1 + \sin x + \sin^2 x + \ldots\ldots\infty = 4 + 2\sqrt{3}$ ಆದಾಗ xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$1 + \sin x + \sin^2 x + \cdots\cdots\infty$

ಇದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದ್ದು, $r = \sin x < 1$

ಆದುದರಿಂದ $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$1 + \sin x + \sin^2 x + \cdots\cdots\infty = \frac{1}{1-\sin x}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1-\sin x} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$(1-\sin x)(4+2\sqrt{3}) = 1$$

i.e. $4 + 2\sqrt{3} - (4+2\sqrt{3})\sin x = 1$

$$3 + 2\sqrt{3} = (4+2\sqrt{3})\sin x$$

$$\therefore \quad \sin x = \frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} \quad = \frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} \times \frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12+2\sqrt{3}-12}{16-12}$$

i.e. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$$

14. $\cot\theta + \tan\theta = 2\operatorname{cosec}\theta$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 2\cos\theta$

ಅಥವಾ $1 = 2\cos\theta \quad \therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in I$.

15. $\sin x - \cos x = \cos 3x - \sin 3x$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\sin x + \sin 3x = \cos 3x + \cos x$$

ಅಂದರೆ, $2\sin 2x \cos x = 2\cos 2x \cos x$

ಅಥವಾ $2\cos x[\sin 2x - \cos 2x] = 0$

$\therefore \quad \cos x = 0$ ಅಥವಾ $\sin 2x = \cos 2x$ i.e. $\tan 2x = 1$

(i) $\cos x = 0$: ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan 2x = 1$: $\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \quad 2x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ ಅಥವಾ

$$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ: $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}, \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, n \in I$

16. $\sin 4\theta \cos 2\theta + \cos 4\theta \sin 2\theta = 0$

ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\frac{1}{2}[\sin 6\theta + \sin 2\theta] + \frac{1}{2}[\sin 6\theta - \sin 2\theta] = 0$$

ಅಥವಾ $\sin 6\theta = 0 = \sin\alpha$ ಇಲ್ಲಿ $\alpha = 0$

$$\therefore \quad 6\theta = n\pi + (-1)^n(0) = n\pi$$

ಅಂದರೆ, $\theta = \frac{n\pi}{6}, \ n \in I$, ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

[**ಸೂಚನೆ:** ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು $\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin(A + B)$ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿದ್ದು, $A = 4\theta, B = 2\theta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\sin 6\theta$ ದೊರೆಯುವುದು.]

17. $2\cos 3\theta + 6\cos\theta + 1 = 0$

ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $\cos 3\theta$ ಎಂಬುದರ ವಿಸ್ತರಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ

$$2[4\cos^3\theta - 3\cos\theta] + 6\cos\theta + 1 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$8\cos^3\theta + 1 = 0$$

ಅಥವಾ $\cos^3\theta = -\frac{1}{8}$

$$\therefore \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$. $n \in I$, ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

18. $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3\sec^4\theta$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\operatorname{cosec}^2\theta$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$\frac{\sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} + 1 = \frac{3\sec^4\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\tan^2\theta + 1 = 3\tan^2\theta\sec^2\theta$$

ಅಥವಾ $3\tan^2\theta\sec^2\theta - \tan^2\theta - 1 = 0$

ಅಥವಾ $3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta) - \tan^2\theta - 1 = 0$

ಅಥವಾ $3\tan^4\theta + 2\tan^2\theta - 1 = 0$

ಈಗ, $\tan^2\theta = a$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$3a^2 + 2a - 1 = 0$$

ಅಥವಾ $3a^2 + 3a - a - 1 = 0$

ಅಥವಾ $3a(a+1) - 1(a+1) = 0$

ಅಥವಾ $(3a-1)(a+1) = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ

$a = \frac{1}{3}$ ಅಥವಾ $a = -1$

ಅಂದರೆ, $\tan^2\theta = +\frac{1}{3}$ ಅಥವಾ $\tan^2\theta = -1$

$\therefore$ $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ಅಥವಾ $\tan = \pm\sqrt{-1}$ (ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.)

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \pm\frac{\pi}{6}$ $\therefore$ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $n \in I$.

ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

19. $3\sin x + 4\cos x = 2$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು $a\cos x + b\sin x = c$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$\sqrt{(3)^2 + (4)^2}$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{2}{5}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ

$\frac{3}{5} = \cos\beta$ ಮತ್ತು $\frac{4}{5} = \sin\beta$ ಎಂದಾಗಿರಲಿ.

($\therefore$ $\beta \approx 53^0 8'$. ಇದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ)

ಈಗ ಸಮೀಕರಣವು

$$\cos\beta\sin x + \sin\beta\cos x = \frac{2}{5}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ,

$\sin(x + \beta) = \frac{2}{5}$ ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \sin^{-1}\frac{2}{5}$.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ: $x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}\frac{2}{5} - \sin^{-1}\frac{4}{5}$

[**ಸೂಚನೆ:** ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಹತ್ತಿರದ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

ಈಗ $\sin^{-1}\frac{2}{5} \approx 23^0 35'$. ಅಂದರೆ, $\alpha = 23^0 35'$

$\therefore$ $x + 53^0 8' = n(180^0) + (-1)^n (23^0 35')$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$$x \approx n(180^0) + (-1)^n (23^0 35') - 53^0 8'].$$

20. $\operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$

ಸಮೀಕರಣದ ಪದಗಳನ್ನು $\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆದಾಗ

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3}$$

ಅಥವಾ $1 + \cos x = \sqrt{3} \sin x$

ಅಂದರೆ, $\sqrt{3} \sin x - \cos x = +1$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1}$ ಅಂದರೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = +\frac{1}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$

ಎಂದು ಬರೆದಾಗ ಸಮೀಕರಣವು

$$\sin x \sin \frac{\pi}{3} - \cos x \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

ಅಥವಾ $\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $\cos \left[x + \frac{\pi}{3} \right] = -\frac{1}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ $\quad \therefore \quad x + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

ಅಥವಾ $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3},\ n \in I$

ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

21. $2\sin^2 x + 4\sin x\cos x = 3$

$\cos^2 x$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಸಮೀಕರಣವು

$2\tan^2 x + 4\tan x = 3\sec^2 x$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $2\tan^2 x + 4\tan x = 3(1 + \tan^2 x)$

ಅಥವಾ $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$

ಅಥವಾ $(\tan x - 1)(\tan x - 3) = 0$

$\therefore$ $\tan x = 1$ ಅಥವಾ $\tan x = 3$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = 45^0$ ಅಥವಾ $\alpha \approx 71^0 34'$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ:

$$x = n(180^0) + 45^0,\ n(180^0) + 71^0 34',\ n \in I.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 8

ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

I 1. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\sec\theta = 2$

4. $4\sin^2\theta = 3$

5. $2\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

6. $\sin 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

7. $\sin 9x = \sin x$

8. $\sin 2x = \cos 3x$

9. $\cot x = \tan 8x$

10. $\tan 2x \tan x = 1$

II

1. $\sin 4x - \sin 2x = \sin 6x$

2. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$

3. $\cos 2x + 5\cos x = 2$

4. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

5. $\sec^2\theta - \left(\sqrt{3}+1\right)\tan\theta + \sqrt{3} - 1 = 0$

6. $\sec\theta - 1 = \left(\sqrt{2}-1\right)\tan\theta$

7. $2\cos 3\theta + 6\cos\theta + 1 = 0$

8. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$

9. $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$

10. $\tan x + 4\cot 2x + 1 = 0$

11. $\tan\theta = 1 - \sec 2\theta$

12. $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$

13. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

14. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

15. $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$

16. $2\cos x - 3\sin x = 2$

17. $5\cos x - 4\sin x = 6$

18. $\sqrt{3}(\tan\theta + \sin\theta) = 4$

19. $\cos\theta = \sqrt{3}(1-\sin\theta)$

20. $\sin 7\theta - \sqrt{3}\cos 4\theta = \sin\theta$

21. $\cot\theta - \tan\theta = 2$

22. $\sin 11\theta \sin 4\theta + \sin 5\theta \sin 2\theta = 0$

23. $\cos 3\theta + 8\cos^3\theta = 0$

24. $\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta = 2\sqrt{2}$

25. $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$

26. $2\sin\theta \ \sin 3\theta = 1$

27. $\cos\theta - \sin\theta = \cos 2\theta$

28. $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

29. $\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

30. $\tan^3\theta + \cot^3\theta = 8\operatorname{cosec}^2 2\theta + 12$

31. $\sin 4\theta - \sin 3\theta + \sin 2\theta - \sin\theta$

32. $\cos 8\theta \sin 6\theta = \cos 4\theta \sin 2\theta$

33. $\sqrt{2}\operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$

34. $\cos 2x = 1 + \tan x$

35. $4\cot 2\theta = \cot^2\theta - \tan^2\theta$

36. $3\cos\theta + 4\sin\theta = 5$

37. $\cot x - \tan x = 2$

38. $\sqrt{3}\sec^2 x + 1 = \left(\sqrt{3}+1\right)\tan x + \sqrt{3}$

39. $8\sin x - 6\cos x = 9$

40. $2\left(\cos^4 x + \sin^4 x\right) = 1$

41. $(1-\tan x)(1+\sin 2x) = 1 + \tan x$

42. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

ಅಧ್ಯಾಯ 9

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

$x^2+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಗತ್ಯ ಮತ್ತು ಶೋಧನೆ ಉಂಟಾಯಿತು. $x^2=-1$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಲಿ, ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಲಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಆಗಲಿ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಿ ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ. ಈ ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗಮಾಡಿದಾಗಲೂ $\sqrt{-1}$ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು **ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ** ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದರು .

ಆಯ್ಲರ್ (1707-1783) ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞರು $\sqrt{-1}$ ಗೆ i ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿದನು. ಅಂದರೆ, $i=\sqrt{-1}$ ಮತ್ತು $i^2=-1$. ಇದರಿಂದ ಆತನು ಮೊದಲಬಾರಿಗೆ $x^2+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು.

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ *ಗೌಸ್* (1777-1855) ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞ $a+ib$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದನು.

9.2.1 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

a ಮತ್ತು bಗಳು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ $a+ib$ಯನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ aಯನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಭಾಗ ಮತ್ತು bಯನ್ನು ಊಹ್ಯಭಾಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $2+7i,\ 4-5i,\ -3i,\ 5,\ \frac{1}{2}-\sqrt{3}i$

ಸೂಚನೆ: ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದ ಒಂದು ಉಪಗಣ.

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ***ಕ್ರಮನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾ ಯುಗ್ಮ*** ಎಂದೂ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳಾಗಿ ಹೀಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು: (2, 7), (4, -5), (0, -3), (5, 0) ಮತ್ತು $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$.

9.2.2 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಹವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ

$z=a+ib$ ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ

$\bar{z}=a-ib$ ಯನ್ನು zನ ***ಸಹವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:

$z=2+7i$	$\bar{z}=2-7i$
$z=4-5i$	$\bar{z}=4+5i$
$z=-3i$	$\bar{z}=3i$
$z=5$	$\bar{z}=5$

9.2.3 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

1. **ಸಮಾನತೆ:** $a+ib=c+id$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ $a=c,\ b=d$
2. **ಕೂಡುವಿಕೆ:** $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
3. **ಕಳೆಯುವಿಕೆ:** $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$
4. **ಗುಣಾಕಾರ:** $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$
5. **ಭಾಗಾಕಾರ:** $\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}\times\frac{c-id}{c-id}$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

6. $z = a+ib$ ಆದರೆ, $\bar{z} = a-ib$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \quad z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = (a^2+b^2)+i(ab-ab)$

ಅಂದರೆ, $z\bar{z} = a^2+b^2$, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $a+ib$ ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

(i) $(2+3i)^2$ (ii) $\frac{2+5i}{7-7i}$ (iii) $\frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$

(i) $(2+3i)^2 = 4+9i^2+12i$

$= 4+9(-1)+12i$

$= -5+12i = (-5)+i(12)$

(ii) $\frac{2+5i}{7-7i} = \frac{2+5i}{7-7i} \times \frac{7+7i}{7+7i}$

$$= \frac{(14-35)+i(14+35)}{7^2+7^2}$$

$$= \frac{-21+i(49)}{98} = \frac{-3+7i}{14} = \left(-\frac{3}{14}\right)+i\left(\frac{1}{2}\right)$$

(iii) $\frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$

$$= \frac{1}{(1+\cos\theta)+i\sin\theta} \times \frac{(1+\cos\theta)-i\sin\theta}{(1+\cos\theta)-i\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}$$

$$= \frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{2+2\cos\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{2(1+\cos\theta)} - \frac{i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \Big/ 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i\tan\frac{\theta}{2}}{2}$$

2. $z = \frac{(1+i)(3+4i)}{2-i}$ ಆದರೆ $z+\bar{z}$ ಮತ್ತು $z\bar{z}$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $z = \frac{(1+i)(3+4i)}{2-i} = \frac{3-4+i(3+4)}{2-i} = \frac{-1+7i}{2-i}$

$$= \frac{-1+7i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$

$$= \frac{(-2-7)+i(14-1)}{4+1}$$

ಆದರೆ, $z = \frac{-9+13i}{5}$

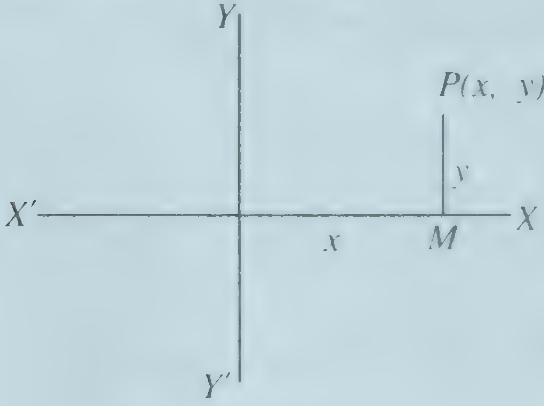
$\therefore \quad \bar{z} = \frac{-9-13i}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $z+\bar{z}=-\frac{9}{5}-\frac{9}{5}=-\frac{18}{5}$

$$z\bar{z}=\frac{-9+13i}{5}\times\frac{-9-13i}{5} \quad =\frac{(-9)^2-(13i)^2}{25}$$

$$=\frac{81+169}{25}=\frac{250}{25}=10$$

9.3 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆ – ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲ (ಅಥವಾ ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲ)



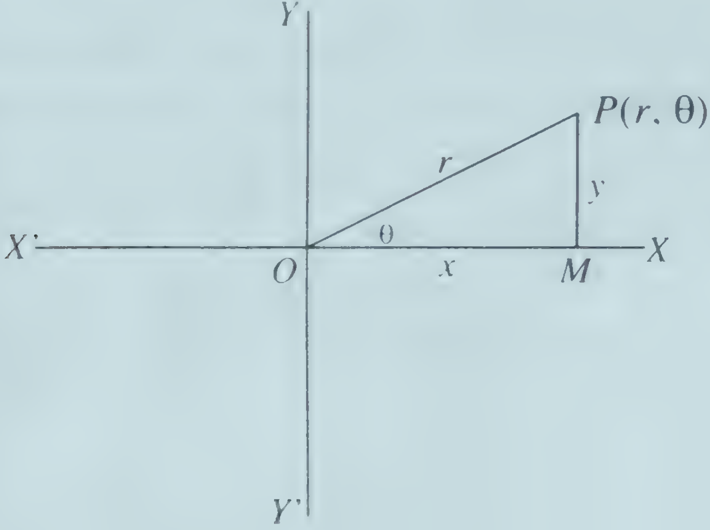
ಚಿತ್ರ 9.1

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $z=(a,b)$ಯು ಒಂದು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ x-ಅಕ್ಷವನ್ನು **ವಾಸ್ತವ ಅಕ್ಷ**ವೆಂದೂ, y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಊಹ್ಯ ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೂ, ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಊಹ್ಯ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೂ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಈ ಸಮತಲದ ಹೆಸರು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲ (ಕಾಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ಪ್ಲೇನ್) ಅಥವಾ **ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲ.**

$z=x+iy$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ $P(x,y)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗುರುತಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 9.1)

9.4 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪ (ಪೋಲಾರ್ ಫಾರಂ)

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $z\equiv(x, y)$ ಅನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ $P(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಸೂಚಿಸಲಿ. ಆಗ Pಯ ಕಾರ್ಟೆಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕ ಯುಗ್ಮವು (x, y) ಆಗುವುದು. ಮೂಲಬಿಂದು O ಮತ್ತು P ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. OPಯು OXನೊಂದಿಗೆ θ ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು $OP=r$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ, (r, θ) ಯುಗ್ಮವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 9.2

ಚಿತ್ರ 9.2 ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರುವಂತೆ

$$x=r\cos\theta \qquad ...(1)$$

$$y=r\sin\theta \qquad ...(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವರ್ಗಿಸಿ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta$$

ಅಥವಾ $x^2+y^2=r^2$

ಅಂದರೆ, $r=\sqrt{x^2+y^2}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು zನ **ಮಾಡ್ಯುಲಸ್** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು $|z|$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore \quad r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

ಧ್ರುವೀಯ ಕೋನ θದ ಬೆಲೆಯನ್ನು $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ಮತ್ತು $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. θವನ್ನು z ನ ***ಕೋನಾಂಕ*** (ಆರ್ಗ್ಯುಮೆಂಟ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\theta = \arg z$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ $z = x + iy$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅಥವಾ ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ: ಕೋನಾಂಕವಾದ θದ ಬೆಲೆಯು $-\pi$ ಮತ್ತು π ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $-\pi \le \theta \le \pi$. ಇದನ್ನು θದ ***ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ***ಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಕೋನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

$\sin\theta$	$\cos\theta$	ಕೋನಾಂಕ
+	+	α
+	–	$\pi - \alpha$
–	+	$-\alpha$
–	–	$-(\pi - \alpha)$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sin\theta = +\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಇರಲಿ. ಈಗ, $\sin\theta = +\frac{1}{2}$ ಇರುವಂತಹ θದ ಲಘುಕೋನ ಬೆಲೆಯು $\frac{\pi}{6}$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಪ್ರಕಾರ, ಕೋನಾಂಕವು $\pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $-1 + i\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}$ (iii) $-1-i$

(i) $-1+i\sqrt{3}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore \quad r\cos\theta=-1$ ಮತ್ತು $r\sin\theta=\sqrt{3}$

ಇವುಗಳಿಂದಾಗಿ $r^2=(-1)^2+(\sqrt{3})^2=4$ ಅಥವಾ $r=2$.

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಲಘುಕೋನವು $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ $|z|=r=2$ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕ $\arg z=\frac{2\pi}{3}$

(ii) $\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(1-\sqrt{3}\right)}{1+3}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$$

ಈಗ, $\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r\cos\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ಮತ್ತು $r\sin\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \quad r^2=\left[\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right]^2+\left[\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right]^2$

ಅಥವಾ $r^2 = \frac{(1+3+2\sqrt{3})+(1+3-2\sqrt{3})}{16} = \frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ಈಗ, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1+\sqrt{3}}{4\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ಮತ್ತು $\sin\theta = \frac{1-\sqrt{3}}{4\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}$

ಇದರ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, $\alpha = 15^0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೋನಾಂಕ $\theta = -\alpha = -15^0$

(iii) $-1-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r\cos\theta = -1$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = -1$

$\therefore$ $r^2 = 2$ ಅಥವಾ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ $r = \sqrt{2}$

ಈಗ, $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ಮತ್ತು $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$

2. $\frac{1+i}{1-i}$ ಅನ್ನು ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}$

$$= \frac{1+i^2+2i}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

ಈಗ, $i = 0 + i, i = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r\cos\theta = 0$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = 1$

$\therefore \quad r^2 = 1$ ಅಥವಾ $r = 1$

ಈಗ $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1 \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad i = 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

3. $\frac{6i}{-3-3i}$ ಯನ್ನು ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $\frac{6i}{-3-3i} = \frac{6i}{-3-3i} \times \frac{-3+3i}{-3+3i}$

$$= \frac{-18i+18i^2}{9+9}$$

$$= \frac{-18-18i}{18}$$

$$= -1-i$$

ಈಗ, $-1-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r\cos\theta = -1$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = -1$

$\therefore \quad r^2 = 2$ ಅಥವಾ $r = \sqrt{2}$

ಈಗ, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಮತ್ತು $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad \theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{3\pi}{4}$$

ಅಂದರೆ, $-1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$

ಸೂಚನೆ: 1, −1, i ಮತ್ತು $-i$ ಗಳನ್ನು ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$1 = 1 + 0i = \cos 0 + i\sin 0, \quad (r = 1, \theta = 0)$$
$$-1 = -1 + 0i = \cos\pi + i\sin\pi, \quad (r = 1, \theta = \pi)$$
$$i = 0 + i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}, \quad \left(r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}\right)$$
$$-i = 0 - i = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right), \quad \left(r = 1, \theta = -\frac{\pi}{2}\right)$$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 13 (ii) -5 (iii) $4i$ (iv) $-2i$

(i) 13ನ್ನು 13.1 ಎಂದು ಬರೆದಾಗ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ = 13 ಕೋನಾಂಕ = 0

ಮೇಲಿನ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

(ii) -5ರ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕ 5 ಮತ್ತು π

(iii) $4i$ಯ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕ 4 ಮತ್ತು $\dfrac{\pi}{2}$

(iv) $-2i$ ಯ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕ 2 ಮತ್ತು $-\dfrac{\pi}{2}$

5. $\dfrac{1}{1+\sin\theta+i\cos\theta}$ ನ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{1}{1+\sin\theta+i\cos\theta}=\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\sec\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sec\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ಆದುದರಿಂದ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ $\frac{1}{2}\sec\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕವು $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}$.

6. $u+iv=\dfrac{2+i}{z+3}$ ಮತ್ತು $z=x+iy$ ಎಂದಾದರೆ

u ಮತ್ತು vಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು x ಮತ್ತು yಗಳ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $u+iv=\dfrac{2+i}{(x+iy)+3}$

$$=\frac{2+i}{(x+3)+iy}\quad=\frac{2+i}{(x+3)+iy}\times\frac{(x+3)-iy}{(x+3)-iy}$$

ಅಥವಾ $u+iv=\frac{2(x+3)+y+i(x+3-2y)}{(x+3)^2+y^2}$

$\therefore \quad u=\frac{2(x+3)+y}{(x+3)^2+y^2}$ ಮತ್ತು $v=\frac{(x+3)-2y}{(x+3)^2+y^2}$

7. $z=a+ib$ ಆದರೆ $z\bar{z}=|z|^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $z\bar{z}=(a+b)(a-ib)$

$=a^2+b^2$

$=|z|^2$ (ಏಕೆಂದರೆ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$)

8. $z=a+ib$ ಆದರೆ $|z|=|\bar{z}|$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ ಮತ್ತು $\bar{z}=a-ib, |\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore \quad |z|=|\bar{z}|$

9. $z_1=a_1+ib_1$ ಮತ್ತು $z_2=a_2+ib_2$ ಆದರೆ $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $z_1z_2=(a_1,a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$

$\therefore \quad |z_1z_2|=\sqrt{(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2}$

$=\sqrt{a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+2a_1a_2b_1b_2}$

$=\sqrt{a_1^2(a_2^2+b_2^2)+b_1^2(b_2^2+a_2^2)}$

$=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}=|z_1||z_2|$

10. z_1 ಮತ್ತು z_2 ಎಂಬುದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\text{amp}(z_1 z_2) = (\text{amp } z_1) + (\text{amp } z_2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$

ಮತ್ತು $z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1][\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\therefore \quad \text{amp } z_1 z_2 = \theta_1 + \theta_2 = (\text{amp } z_1) + (\text{amp } z_2)$$

ಸೂಚನೆ: ಈ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು n ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ

(i) $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).....(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)$$

(ii) $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2|\ldots|z_n|$ ಮತ್ತು

(iii) $\text{amp}(z_1\ z_2 .....z_n) = \text{amp } z_1 + \text{amp } z_2 + ... + \text{amp } z_n$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

9.5 ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

(i) ಕೂಡುವಿಕೆ $(z_1 + z_2)$: $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ

ಈಗ, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ಆಗಿರಲಿ.

OP ಮತ್ತು *OQ*ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, *OPRQ* ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು (ಚಿತ್ರ 9.3ರಲ್ಲಿ) ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ. *OR* ಮತ್ತು *PQ*ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ.

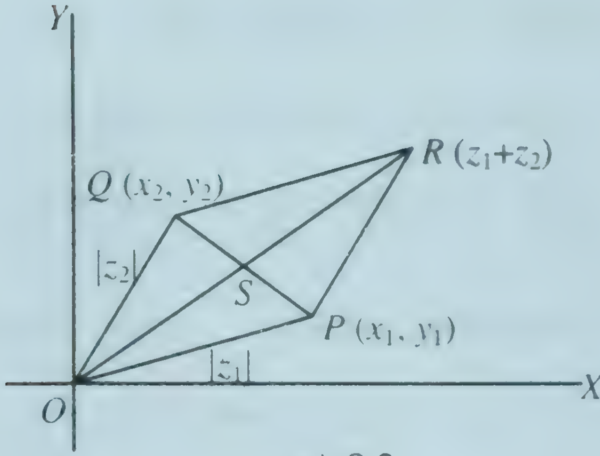
ಓಕರ್ಣಗಳಾದ OR ಮತ್ತು PQಗಳು S ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈಗ, S ಬಿಂದುವು PQವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad S \equiv \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$$

ಆದರೆ S ಬಿಂದುವು ORನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಕೂಡ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, $O \equiv (0,0)$ ಮತ್ತು $S \equiv \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$ ಆದುದರಿಂದ

$$R \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

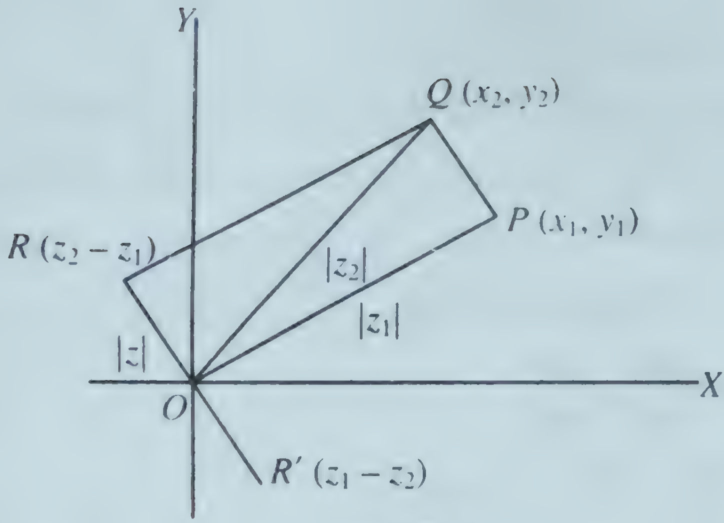


ಚಿತ್ರ 9.3

ಅಂದರೆ, R ಬಿಂದುವು $[(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)]$ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, R ಬಿಂದುವು $(z_1 + z_2)$ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. OP, OQ ಮತ್ತು ORಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $|z_1|, |z_2|$ ಮತ್ತು $|z_1 + z_2|$ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

(ii) ಕಳೆಯುವಿಕೆ $(z_1 - z_2)$: $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ ಮತ್ತು $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ಆಗಿರಲಿ. $OPRQ$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ. R ಬಿಂದುವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ zನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.4). ಈ ಮೇಲಿನ (i)ರ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ ನಮಗೆ $z_2 = z + z_1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

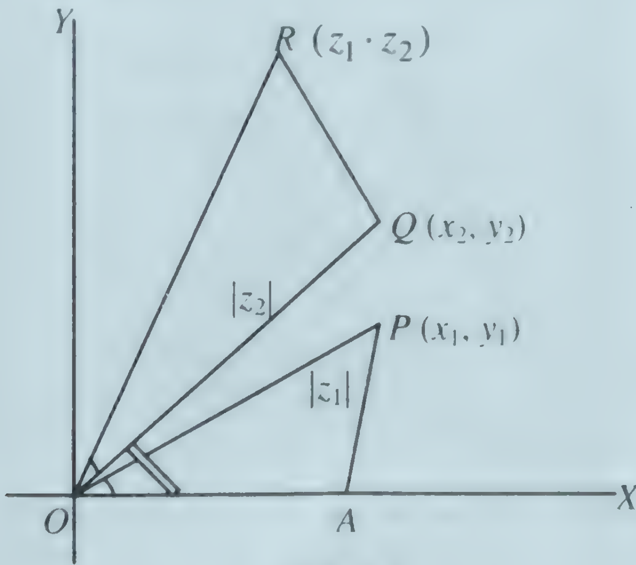
$$\therefore \quad z = z_2 - z_1$$



ಚಿತ್ರ 9.4

ಅಂದರೆ Rಬಿಂದುವು $z_2 - z_1$ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. RO ರೇಖೆಯನ್ನು R' ತನಕ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಷ್ಟೇ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಅಂದರೆ, $OR = OR'$ ಆದ್ದರಿಂದ R' ಬಿಂದುವು $z_1 - z_2$ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) ಗುಣಾಕಾರ $(z_1 \cdot z_2)$: $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.5).



ಚಿತ್ರ 9.5

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

ಮತ್ತು $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ಆಗಿರಲಿ

$$OP = r_1,\ \angle XOP = \theta_1$$
$$OQ = r_2,\ \angle XOQ = \theta_2$$

ಮತ್ತು $OA = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. APಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 9.5). $\angle ROQ = \angle POA = \theta_1$ ಮತ್ತು $\angle OQR = \angle OAP$ ಆಗಿರುವಂತೆ ORQ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

$$\therefore\ \Delta^{le} OQR \parallel \Delta^{le} OAP$$

$$\therefore\ \frac{OR}{OP} = \frac{OQ}{OA}$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{OR}{OP} = \dfrac{OQ}{1}$ $(\because OA = 1)$

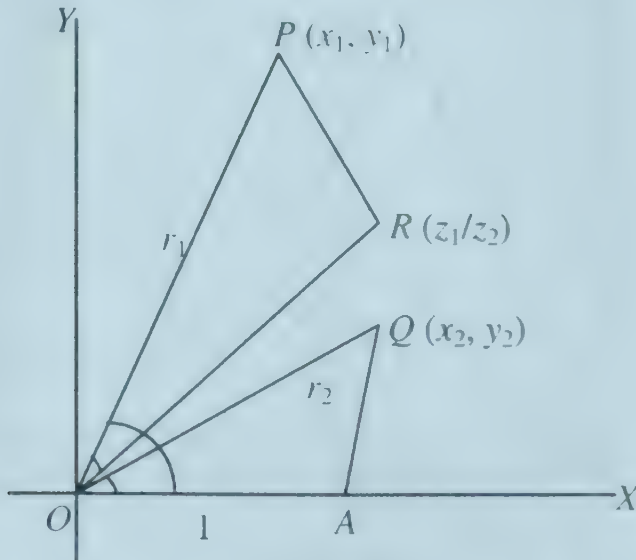
ಅಥವಾ $OR = OP \cdot OQ$

ಅಥವಾ $OR = r_1 \cdot r_2$

ಮತ್ತು $\angle ROX = \angle AOQ + \angle QOR = \theta_2 + \theta_1$

ಆದ್ದರಿಂದ, R ಬಿಂದುವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $z_1 \cdot z_2$ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(iv) ಭಾಗಾಕಾರ $z_1 / z_2, (z_2 \neq 0)$: $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.6).



ಚಿತ್ರ 9.6

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

ಮತ್ತು $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಚಿತ್ರ 9.6ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$OA = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು A ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ.

$OP = r_1$, $\angle XOP = \theta_1$ ಮತ್ತು $OQ = r_2$, $\angle XOQ = \theta_2$ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle POR = \angle QOA = \theta_2$ ಮತ್ತು $\angle ORP = \angle OAQ$ ಆಗುವಂತೆ ORP ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\Delta ORP \,|||\, \Delta OAQ$$

$$\therefore \quad \frac{OR}{OA} = \frac{OP}{OQ}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{OR}{1} = \dfrac{OP}{OQ} \qquad \therefore \quad OR = \dfrac{r_1}{r_2}$

$$\angle ROX = \angle POX - \angle POR = \theta_1 - \theta_2$$

ಅಂದರೆ, Rನ ಕೋನಾಂಕವು $\theta_1 - \theta_2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆ R ಬಿಂದುವು ಸೂಚಿಸುವ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ $\dfrac{r_1}{r_2}$ ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋನಾಂಕವು $(\theta_1 - \theta_2)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, R ಬಿಂದುವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $\dfrac{z_1}{z_2}$ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

9.6 ಡಿಮೋಯ್ವರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ

(i) n ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(ii) n ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ

$\cos n\theta + i\sin n\theta$ ಎಂಬುದು $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ನ ಬೆಲೆಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ:

(i) ***n* ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ.**

ಈಗ, ಡಿಮೋಯ್ವರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad ...(1)$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

$n=1$ ಆದಾಗ ಸೂತ್ರ (1) ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

ಈಗ $n=m$ ಎಂದಾದಾಗ ಸೂತ್ರ (1) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಅಂದರೆ $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \quad ...(2)$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಕಡೆ $(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ಅಂದರೆ, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{m+1} = \cos m\theta\cos\theta + i^2\sin m\theta\sin\theta + i(\cos m\theta\sin\theta + \sin m\theta\cos\theta)$

ಅಥವಾ $(\cos\theta + i\sin\theta)^{m+1} = (\cos m\theta\cos\theta - \sin m\theta\cos\theta) + i(\sin m\theta\cos\theta + \cos m\theta\sin\theta)$

$$= \cos(m+1)\theta + i\sin(m+1)\theta$$

ಅಂದರೆ, (1) ಸೂತ್ರವು $n=m$ ಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ $n=m+1$ ಎಂದಾದಾಗ ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ಫಲಿತಾಂಶವು ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ***n* ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ**

$n=-m$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ m ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಈಗ, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$

$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \qquad (\because m \text{ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ})$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} \times \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{\cos m\theta - i \sin m\theta}$$

$$= \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}$$

$$= \cos m\theta - i \sin m\theta$$

$$= \cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta)$$

$$= \cos n\theta + i \sin n\theta \qquad [\because -m = n]$$

ಆದ್ದರಿಂದ, n ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

(iii) n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿರಲಿ

$n = \frac{p}{q}$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ ಹಾಗೂ qವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $\left(\cos\frac{p}{q}\theta + i \sin\frac{p}{q}\theta\right)^q = \cos\left[q \cdot \frac{p}{q} \cdot \theta\right] + i \sin\left[q \cdot \frac{p}{q}\theta\right]$

$$= \cos p\theta + i \sin p\theta \quad \text{[ಫಲಿತಾಂಶ (i) ರಿಂದ]}$$

ಅಂದರೆ, $\left(\cos\frac{p}{q}\theta + i \sin\frac{p}{q}\theta\right)^q = (\cos\theta + i \sin\theta)^p$

[ಫಲಿತಾಂಶ (i) ಅಥವಾ (ii) ರಿಂದ]

ಈಗ, ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲೂ qನೇ ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ

$\left[\cos\frac{p}{q}\theta + i \sin\frac{p}{q}\theta\right]$ವು $(\cos\theta + i \sin\theta)^{p/q}$ ನ **ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.**

ಏಕೆಂದರೆ qನೇ ವರ್ಗಮೂಲ ತೆಗೆದಾಗ qಗಳಷ್ಟು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ನ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬೆಲೆಯು $\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆಗಳು:

(i) $n = -1$ ಆದಾಗ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

(ii) $$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$$
$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$
$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

(iii) $(\sin\theta + i\cos\theta)^n \neq \sin n\theta + i\cos n\theta$

ಆದರೆ, $$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^n$$
$$= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿ

(i) $$\frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}}$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸರಳಗೊಳಿಸಬಹುದು:

$$\frac{[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}} = \frac{[(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}]^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-22}$$

$$= \cos 22\theta - i\sin 22\theta$$

(ii) $\left[\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right]^{2/3}$

$$=\cos\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{3\pi}{2}\right]+i\sin\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{3\pi}{2}\right]=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

(iii) $\dfrac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^7(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{-5}}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{12}(\cos 5\theta-i\sin 5\theta)^{-6}}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸರಳಗೊಳಿಸಬಹುದು:

$$\frac{\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}\right]^7\left[\left((\cos\theta+i\sin\theta)^3\right)\right]^{-5}}{\left[(\cos\theta+i\sin)^4\right]^{12}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-5}\right]^{-6}}$$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-14}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-15}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{48}(\cos\theta+i\sin\theta)^{30}}$$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-29}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{78}}$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-29-78}$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-107}$$

$$=\cos 107\theta-i\sin 107\theta$$

2. $\left[\dfrac{1+\sin\phi+i\cos\phi}{1+\sin\phi-i\cos\phi}\right]^n=\cos\left[\dfrac{n\pi}{2}-n\phi\right]+i\sin\left[\dfrac{n\pi}{2}-n\phi\right]$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $\sin\phi+i\cos\phi=z$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $\sin\phi-i\cos\phi=\dfrac{1}{z}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \left[\frac{1+\sin\phi+i\cos\phi}{1+\sin\phi-i\cos\phi}\right]^n = \left(\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+z}{\frac{z+1}{z}}\right)^n = z^n = (\sin\phi + i\cos\phi)^n$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right]^n$$

$$= \cos\left(n\frac{\pi}{2}-n\phi\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{2}-n\phi\right)$$

3. $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ ಮತ್ತು $2\cos\phi = y + \frac{1}{y}$ ಆಗಿದ್ದರೆ

(i) $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = \cos(m\theta + n\phi)$

(ii) $\frac{x^m}{y^n} + \frac{y^n}{x^m} = 2\cos(m\theta - n\phi)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$

$\therefore \quad 2x\cos\theta = x^2 + 1$

ಅಥವಾ $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

$$= \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$$

ಅಂದರೆ, $x = \cos\theta \pm i\sin\theta$

ಈಗ, $x = \cos\theta + i\sin\theta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $y = \cos\phi + i\sin\phi$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \quad x^m = (\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \qquad ...(1)$$

ಮತ್ತು $y^n = (\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi \qquad ...(2)$

ಮೇಲಿನ (1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ

(i) $x^m y^n = (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos n\phi + i\sin n\phi)$

$$= \cos(m\theta + n\phi) + i\sin(m\theta + n\phi) \qquad ...(3)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\dfrac{1}{x^m y^n} = \cos(m\theta + n\phi) - i\sin(m\theta + n\phi) \qquad ...(4)$

(3) ಮತ್ತು (4) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\theta + n\phi)$$

ಈಗ, $\dfrac{x^m}{y^n} = \dfrac{\cos m\theta + i\sin m\theta}{\cos n\phi + i\sin n\phi}$ [(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ]

$$= (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos n\phi - i\sin n\phi)$$

$$= (\cos m\theta + i\sin m\theta)[(\cos(-n\phi) + i\sin(-n\phi)]$$

$$= \cos(m\theta - n\phi) + i\sin(m\theta - n\phi) \qquad ...(5)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\dfrac{y^n}{x^m} = \dfrac{\cos n\phi + i\sin n\phi}{\cos m\theta + i\sin m\theta}$

$$= \cos(n\phi - m\theta) + i\sin(n\phi - m\theta)$$

$$= \cos(m\theta - n\phi) - i\sin(m\theta - n\phi) \qquad ...(6)$$

(5) ಮತ್ತು (6) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$\frac{x^m}{y^n}+\frac{y^n}{x^m}=2\cos(m\theta-n\phi)$$

4. n ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $1+i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $r=\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad 1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right] \qquad ...(1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$$(1-i)^n=(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right]=(\sqrt{2})^n\left[\cos n\frac{\pi}{4}-i\sin n\frac{\pi}{4}\right] \qquad ...(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4} \quad =2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$

5. $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$

$$=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos n\frac{\theta}{2}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$1+\cos\theta+i\sin\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\therefore \quad (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]^n$$

$$= 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\cos n\frac{\theta}{2}+i\sin n\frac{\theta}{2}\right] \quad ...(1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ,

$$(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\cos n\frac{\theta}{2}-i\sin n\frac{\theta}{2}\right] \quad ...(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$$

$$= 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[2\cos n\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= 2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos n\frac{\theta}{2}$$

6. $\left(1+\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{10}{3}}+\left(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{10}{3}}=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, $\cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{10}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \left(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{10}{3}} = \left(1+\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)^{\frac{10}{3}}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$\left(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{10}{3}} = \left(1+\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)^{\frac{10}{3}}$$

$$= 2^{\frac{10}{3}}\left(\cos\frac{3\pi}{20}\right)^{\frac{10}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad ...(1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$$\left(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{10}{3}} = \left(1+\cos\frac{3\pi}{10}-i\sin\frac{3\pi}{10}\right)^{\frac{10}{3}}$$

$$= 2^{\frac{10}{3}}\left(\cos\frac{3\pi}{20}\right)^{\frac{10}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad ...(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$\left(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{10}{3}} + \left(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{10}{3}}$$

$$= 2^{\frac{10}{3}}\left(\cos\frac{3\pi}{20}\right)^{\frac{10}{3}}\left(2\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{2} = 0\right]$$

7. $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$ ಆದರೆ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots \infty = -1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = \cos\frac{\pi}{2^2} + i\sin\frac{\pi}{2^2}$$

$$x_3 = \cos\frac{\pi}{2^3} + i\sin\frac{\pi}{2^3} \cdots\cdots$$

ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots\cdots = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{2^3} + \cdots\cdots\right)$$

$$+ i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{2^3} + \cdots\cdots\right)$$

ಈಗ $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{2^3} + \cdots\cdots$ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$= \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\right)$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots + \infty$ ಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು $r = \frac{1}{2} < 1$

$$\therefore \quad S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\infty = 1$$

$$\therefore \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots\cdots\infty = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

8. $\log(-i)$ ಯ ಕೋನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\log_e(-i) = a + ib$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore \quad -i = e^{a+ib}$

i.e. $-i = e^{a} \cdot e^{ib} = e^{a}(\cos b + i \sin b)$

$-i = e^{a} \cos b + ie^{a} \sin b$

ವಾಸ್ತವ ಭಾಗ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$$\left.\begin{array}{l} e^{a} \cos b = 0 \\ e^{a} \sin b = -1 \end{array}\right\} \qquad \ldots(1)$$

$\therefore \quad \tan b = \frac{-1}{0} \to -\infty$

$\therefore \quad b = \frac{-\pi}{2}$

ಸಮೀಕರಣ (1)ರಿಂದ $e^{2a} \cos^2 b + e^{2a} \sin^2 b = 1$

$\therefore \qquad e^{2a} = 1$

ಅಂದರೆ $\qquad 2a = \log 1 = 0$

$\therefore \qquad a = 0$

$\log(-i)$ ಯ ಕೋನಾಂಕವು $\tan^{-1} \frac{b}{a}$

ಇಲ್ಲಿ $\qquad a = 0, \quad b = \frac{-\pi}{2}$

$\therefore$ ಕೋನಾಂಕವು $\tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

9. $\log(4-3i)$ ಯ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$\log_e(4-3i) = a + ib$ ಎಂದಿರಲಿ

$$\therefore \quad 4-3i = e^{a+ib}$$

$$= e^a \cdot e^{ib}$$

$$= e^a(\cos b + i\sin b)$$

ಆದುದರಿಂದ $4 = e^a \cos b$ ಮತ್ತು $-3 = e^a \sin b$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$4^2 + 3^2 = e^{2a}\left(\cos^2 b + \sin^2 b\right)$$

i.e. $25 = e^{2a} \quad \therefore \quad 5 = e^a$

ಅಥವಾ $\log 5 = a$

ಅಂದರೆ $\log(4-3i)$ ಯ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗ $\log 5$

10. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^5 = 32$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $1+i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $r = 2$ ಮತ್ತು $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad \left(1+i\sqrt{3}\right)^5 = 2^5\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^5$$

$$= 2^5\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right] \qquad ...(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5 = 2^5\left[\cos 5\frac{\pi}{3} - i\sin 5\frac{\pi}{3}\right]$ ...(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^5 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^5 = 2\cdot 2^5 \cos 5\frac{\pi}{3}$$

$$= 2^6 \cos\left[2\pi - \frac{\pi}{3}\right] \quad = 2^6 \cos\frac{\pi}{3} \quad = 2^6\cdot\frac{1}{2} = 2^5 = 32$$

11. α ಮತ್ತು β ಗಳು $x^2 - 2x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos n\frac{\pi}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

ಅಥವಾ $x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$

ಅಂದರೆ, $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\beta = 1 - i\sqrt{3}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad \alpha = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right],\ \alpha^n = 2^n\left[\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3}\right]$$

ಮತ್ತು $\beta = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right],\ \beta^n = 2^n\left[\cos n\frac{\pi}{3} - i\sin n\frac{\pi}{3}\right]$

$$\therefore \quad \alpha^n + \beta^n = 2\cdot 2^n \cos n\frac{\pi}{3} = 2^{n+1}\cos n\frac{\pi}{3}$$

12. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$ ಆದರೆ

(i) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

(ii) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$

ಮತ್ತು, $i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 0$

$\therefore \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 0$

ಅಂದರೆ,

$(\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\beta + i\sin\beta) + (\cos\gamma + i\sin\gamma) = 0 \quad ...(1)$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$(\cos\alpha - i\sin\alpha) + (\cos\beta - i\sin\beta) + (\cos\gamma - i\sin\gamma) = 0 \quad ...(2)$

ಈಗ, $x + y + z = 0$ ಆದಾಗ $(x + y + z)^2 = 0$

ಅಂದರೆ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0 \quad ...(3)$

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ ಆದಾಗ

$\frac{yz + xz + xy}{xyz} = 0$ ಅಂದರೆ $xy + yz + xz = 0 \quad ...(4)$

ಫಲಿತಾಂಶ (3)ರಲ್ಲಿ (4)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(0) = 0$ ಅಂದರೆ $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

ಈಗ $x = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \frac{1}{x} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$y = \cos\beta + i\sin\beta, \quad \frac{1}{y} = \cos\beta - i\sin\beta$

$z = \cos y + i\sin y, \quad \frac{1}{z} = \cos y - i\sin y$

ಆಗಿರಲಿ. (1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ

$$x+y+z=0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

$$\therefore \quad x^2+y^2+z^2=0$$

ಅಂದರೆ,

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2+(\cos\beta+i\sin\beta)^2+(\cos\gamma+i\sin\gamma)^2=0$$

ಅಥವಾ

$$(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)+(\cos 2\beta+i\sin 2\beta)+(\cos 2\gamma+i\sin 2\gamma)=0$$

ಅಥವಾ

$$(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)+i(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)=0$$

$$\therefore \quad \cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0 \qquad \text{...(5a)}$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0 \qquad \text{...(5b)}$$

ಫಲಿತಾಂಶ (5a) ಇಂದ

$$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)=0$$

$$\therefore \quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$$

13. $x=\cos\theta+i\sin\theta$ ಮತ್ತು $\sqrt{1-c^2}=nc-1$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$1+c\cos\theta=\frac{c}{2n}(1+nx)\left[1+\frac{n}{x}\right]$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\sqrt{1-c^2}=nc-1$

$$\therefore \quad 1-c^2=(nc-1)^2=n^2c^2+1-2nc$$

ಅಥವಾ $\quad 2nc=n^2c^2+c^2$

ಅಥವಾ $2n = c(n^2+1)$ ಅಥವಾ $1 = \frac{c}{2n}\left(1+n^2\right)$ ...(1)

ಈಗ, $x + \frac{1}{x} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta$ ..(2)

ಈಗ, $\frac{c}{2n}(1+nx)\left[1+\frac{n}{x}\right] = \frac{c}{2n}\left(1+\frac{n}{x}+nx+n^2\right)$

$$= \frac{c}{2n}\left[1+n^2+n\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{c}{2n}\left[1+n^2+n(2\cos\theta)\right] \quad [(2) \text{ ರಿಂದ}]$$

$$= \frac{c}{2n}\left[1+n^2\right] + c\cos\theta$$

$$= 1 + c\cos\theta \quad [(1) \text{ ರಿಂದ}]$$

9.7 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘಾತ ಮೂಲಗಳು

$z = a + ib$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ ನಾವು $z^{1/q}$ ಎಂಬುದು q ಬಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad z^{1/q} = r^{1/q}(\cos\theta + i\sin\theta)^{1/q}$

ಈಗ, $\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$

ಮತ್ತು $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \quad z^{1/q} = r^{1/q}\left[\cos(2n\pi+\theta) + i\sin(2n\pi+\theta)\right]^{1/q}$

ಡಿಮೋಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$[\cos(2n\pi+\theta)+i\sin(2n\pi+\theta)]^{1/q}$ ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯು

$\cos\frac{2n\pi+\theta}{q}+i\sin\frac{2n\pi+\theta}{q}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n=0, 1, 2, \ldots, q-1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

$$z^{1/q}=r^{1/q}\left[\cos\left(\frac{2n\pi+\theta}{q}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi+\theta}{q}\right)\right] \qquad \ldots(1)$$

ಎಂಬ q ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ (1) ರಿಂದ $a+ib$ ಯ q ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅವುಗಳು ಯಾವುವೆಂದರೆ

$$n=0 \;:\; r^{1/q}\left[\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right]$$

$$n=1 \;:\; r^{1/q}\left[\cos\left(\frac{2\pi+\theta}{q}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+\theta}{q}\right)\right]$$

$$n=2 \;:\; r^{1/q}\left[\cos\left(\frac{4\pi+\theta}{q}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi+\theta}{q}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$n=q-1 \;:\; r^{1/q}\left[\cos\frac{2(q-1)\pi+\theta}{q}+i\sin\frac{2(q-1)\pi+\theta}{q}\right]$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1)ರಲ್ಲಿ $n=q, q+1, \ldots\ldots$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಮೇಲಿನ ಬೆಲೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಹೀಗೆ, $(a+ib)$ ಯ q ಮೂಲಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರ (1) ರಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $(1-i\sqrt{3})^{1/5}$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   ಈಗ, $1-i\sqrt{3}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

   ಅಂದರೆ, $1=r\cos\theta$ ಮತ್ತು $-\sqrt{3}=r\sin\theta$

$$\therefore \quad r = 2,\ \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad 1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

ಅಥವಾ $1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$\therefore \quad \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{1/5} = 2^{1/5}\left[\cos\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]^{1/5}$$

$$= 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{2n\pi - \frac{\pi}{3}}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2n\pi - \frac{\pi}{3}}{5}\right)\right]$$

$n = 0, 1, 2, 3, 4$

$$= 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{6n\pi - \pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{6n\pi - \pi}{15}\right)\right]$$

$n = 0, 1, 2, 3, 4$

ಈ ಬೇರೆ ಬೇರೆ 5 ಬೆಲೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$n = 0\ :\ 2^{1/5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)\right]$

$n = 1\ :\ 2^{1/5}\left[\cos\frac{5\pi}{15} + i\sin\frac{5\pi}{15}\right]$

$n = 2\ :\ 2^{1/5}\left[\cos\frac{11\pi}{15} + i\sin\frac{11\pi}{15}\right]$

$n = 3\ :\ 2^{1/5}\left[\cos\frac{17\pi}{15} + i\sin\frac{17\pi}{15}\right]$

$$n=4 \ : \ 2^{1/5}\left[\cos\frac{23\pi}{15}+i\sin\frac{23\pi}{15}\right]$$

2. $(8i)^{1/3}$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $8i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $0 = r\cos\theta$ ಮತ್ತು $8 = r\sin\theta$

$$\therefore \quad r = 8, \ \theta = \frac{\pi}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $8i = 8\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

ಅಥವಾ $8i = 8\left[\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$\therefore \quad (8i)^{1/3} = 8^{1/3}\left[\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{1/3} \qquad n=0, 1, 2$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{4n\pi+\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4n\pi+\pi}{6}\right)\right] \qquad n=0, 1, 2$$

ಈ ಮೂರು ಘನಮೂಲಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$$n=0 \ : \ 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right] = \sqrt{3}+i$$

$$n=1 \ : \ 2\left[\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}\right)\right] = -\sqrt{3}+i$$

$$n=2 \ : \ 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 2(0-i\cdot 1) = -2i$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i$ ಮತ್ತು $-2i$ ಇವುಗಳು $(8i)^{1/3}$ ರ ಬೆಲೆಗಳು.

3. $-\sqrt{3}-i$ ಯ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ.

ಈಗ, $-\sqrt{3}-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $r\cos\theta = -\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = -1$

$$\therefore \quad r = 2,\ \theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $-\sqrt{3}-i = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$$\therefore \quad \left(-\sqrt{3}-i\right)^{1/3} = 2^{1/3}\left[\cos\left(2n\pi - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2n\pi - \frac{5\pi}{6}\right)\right]^{1/3}$$

$n = 0, 1, 2$

$$= 2^{1/3}\left[\cos\left(\frac{12n\pi - 5\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{12n\pi - 5\pi}{18}\right)\right]$$

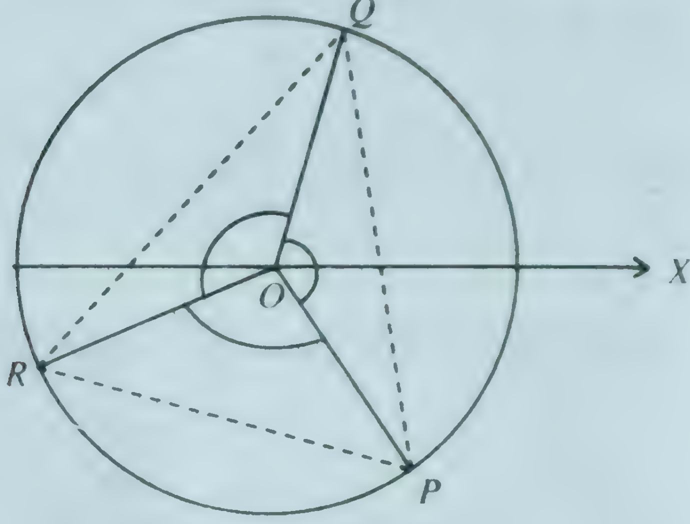
$$n = 0 \ : \quad 2^{1/3}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{18}\right)\right]$$

$$n = 1 \ : \quad 2^{1/3}\left[\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right]$$

$$n = 2 \ : \quad 2^{1/3}\left[\cos\frac{19\pi}{18} + i\sin\frac{19\pi}{18}\right]$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ: $2^{1/3}$ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದರ ಕೇಂದ್ರ O ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.7). x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ $-\frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}$ ಮತ್ತು $\frac{19\pi}{18}$ ಎಂಬ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆ

ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು P, Q ಮತ್ತು Rಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಈಗ P, Q ಮತ್ತು Rಬಿಂದುಗಳು $\left(-\sqrt{3}-i\right)$ನ ಘನ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ $\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP = \frac{2\pi}{3}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ, $\Delta^{le} PQR$ ಸಮಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.7

4. $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3/4}$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅವರ ಗುಣಲಬ್ಧವು '1' ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $r\cos\theta = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ಆದುದರಿಂದ $r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$$\tan\theta = \sqrt{3} \qquad \therefore \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{4}}=\left[\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{3}{4}}$$

$$=\cos\frac{3}{4}\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\frac{3}{4}\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$n=0,1,2,3$

$n=0,\ \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ ...(1)

$n=1,\ \cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$ ...(2)

$n=2,\ \cos\frac{13\pi}{4}+i\sin\frac{13\pi}{4}$ ...(3)

$n=3,\ \cos\frac{19\pi}{4}+i\sin\frac{19\pi}{4}$ ...(4)

(1), (2), (3), (4)ಗಳಿಂದ $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3/4}$ ನ ನಾಲ್ಕು ಬೆಲೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ.

ಈ ನಾಲ್ಕು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\cdot\left(\cos\frac{13\pi}{4}+i\sin\frac{13\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{19\pi}{4}+i\sin\frac{19\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{13\pi}{4}+\frac{19\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{13\pi}{4}+\frac{19\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{40\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{40\pi}{4}\right)$$

$$= \cos 10\pi + i\sin 10\pi \quad = (\cos\pi + i\sin\pi)^{10} \quad = (-1)^{10} = 1$$

5. $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು:

$$x^4(x^3 - 1) - 1(x^3 - 1) = 0$$

ಅಥವಾ $(x^4 - 1)(x^3 - 1) = 0$

ಅಥವಾ $x^4 = 1, \; x^3 = 1$

$\therefore \quad x = (1)^{1/4}, \; x = (1)^{1/3}$

ಈಗ, $1 = 1 + i(0) = [\cos(0) + i\sin(0)]$

ಅಥವಾ $1 = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi$

$\therefore \quad 1^{1/4} = \cos\frac{2n\pi}{4} + i\sin\frac{2n\pi}{4}, \quad n = 0, 1, 2, 3$

ಆಗ ಬರುವ ಚತುರ್ಘಾತ ಮೂಲಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$n = 0 \quad : \quad 1$

$n = 1 \quad : \quad i$

$n = 2 \quad : \quad -1$

$n = 3 \quad : \quad -i$

ಹಾಗೆಯೇ, $1^{1/3} = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}, \; n = 0, 1, 2$

ಇದರಿಂದಾಗಿ ಬರುವ ಘನಮೂಲಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$n = 0 \quad : \quad 1$

$n=1 \quad : \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n=2 \quad : \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$\pm 1, \pm i, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

6. $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಈಗ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $(x-1)$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $x=1$.

ಅಂದರೆ, ಸಮೀಕರಣವು

$x^7-1=0$ ಅಥವಾ $x=(1)^{1/7}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad x=(1)^{1/7}=\cos\frac{2n\pi}{7}+i\sin\frac{2n\pi}{7}, \; n=0, 1, 3, 4, 5, 6$

ಈಗ 7 ಮೂಲಗಳ ಪೈಕಿ, $n=0$ ಆದಾಗ $x=1$ ಎಂಬ ಮೂಲವು ಬರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇನ್ನುಳಿದ 6 ಮೂಲಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

7. $x^{10}+11x^5-1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$\pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\cos\frac{2n\pi}{5}+i\sin\frac{2n\pi}{5}\right]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $x^5=a$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು

$a^2+11a-1=0$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad a=\frac{-11\pm\sqrt{121+4}}{2}$$

ಅಥವಾ $x^5 = \dfrac{-11 \pm \sqrt{125}}{2}$

ಅಥವಾ $x^5 = \dfrac{-176 \pm 80\sqrt{5}}{32}$ (16 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

ಅಥವಾ $x^5 = \left(\pm \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 [\cos 2n\pi \pm i \sin 2n\pi]$

$$\therefore \quad x = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\cos \frac{2n\pi}{5} \pm i \sin \frac{2n\pi}{5}\right] \quad n = 0, 1, 2, 3, 4$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು $a + ib$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $(2+3i)(3-2i)$ (ii) $\dfrac{4}{4+3i} + \dfrac{i}{3-4i}$

   (iii) $\dfrac{1}{i(i+1)}$ (iv) $\dfrac{(2+i)(3-4i)}{1+2i}$

   (v) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಮಾಡ್ಯುಲಸ್–ಕೋನಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

   (i) $1 + i\sqrt{3}$ (ii) $\dfrac{-2}{-\sqrt{3}+i}$ (iii) $\dfrac{6i}{-3-3i}$

   (iv) -8 (v) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ (vi) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$

   (vii) $1 + \cos\alpha - i\sin\alpha$ (viii) $1 - i\tan\alpha$

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಡಿಮೋಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) $(1+i\sqrt{3})^4$ (ii) $(-1+i)^{10}$ (iii) $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$

(iv) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^9$ (v) $\left(\sqrt{2}+i\right)^4+\left(\sqrt{2}-i\right)^4$

(vi) $\left(\sqrt{3}+i\right)^5+\left(\sqrt{3}-i\right)^5$ (vii) $\left(\sqrt{3}+i\right)^6-\left(\sqrt{3}-i\right)^6$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) $$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)^{10}+\left(\cos\frac{\pi}{15}-i\sin\frac{\pi}{15}\right)^{10}}{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

(ii) $\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{(\sin\alpha+i\cos\alpha)^5}$ (iii) $\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{11}{2}}}{\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}}$

(iv) $$\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5(\cos\theta-i\sin\theta)^3}{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^{11}(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^5}$$

(v) $\left[\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{1+\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}}\right]^4$ (vi) $\left[\frac{1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}}\right]^{\frac{1}{2}}$

5. $x=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad y=\cos\beta+i\sin\beta$

$z=\cos\gamma+i\sin\gamma$ ಮತ್ತು $u=\cos\delta+i\sin\delta$ ಆದಾಗ

$(x+y)(z+u)$

$$=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right]$$

ಮತ್ತು $\frac{1}{(x-y)(z-u)}$

$$=\frac{-1}{4}\operatorname{cosec}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{cosec}\frac{\gamma-\delta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}-i\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right]$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $2\cos\theta=x+\frac{1}{x}$ ಮತ್ತು $2\cos\phi=y+\frac{1}{y}$ ಆದಾಗ

$2\cos(\theta+\phi)=xy+\frac{1}{xy}$

$2\sin(\theta+\phi)=xy-\frac{1}{xy}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ ಆದರೆ

(i) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

(iii) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{3}{2}=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. $x=\cos\theta+i\sin\theta$ ಆದರೆ $\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=i\tan n\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. $\sin\theta+\sin\phi=0=\cos\theta+\cos\phi$ ಆದರೆ

$\cos 2\theta+\cos 2\phi=2\cos(\pi+\theta+\phi)$ ಮತ್ತು

$\sin 2\theta+\sin 2\phi=2\sin(\pi+\theta+\phi)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $z^2 + \bar{z} = 0$ ಆದರೆ $z = 0, -1, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

11. $e^{\left(2+i\frac{\pi}{6}\right)} = e^2\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $\alpha = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, $\beta = -\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ಆದರೆ $\alpha e^{\alpha x} + \beta e^{\beta x}$

$= e^{-\frac{x}{2}}\left[\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

13. $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$, $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$

ಎಂದಾದರೆ, $\dfrac{x^3y^4}{z^2} + \dfrac{z^2}{x^3y^4} = 2\cos(3\alpha + 4\beta - 2\gamma)$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $a = \cos\theta + i\sin\theta$ ಎಂದಾದರೆ, $\dfrac{1+a}{1-a} = i\cot\dfrac{\theta}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $\left(\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \cos 2n\theta + i\sin 2n\theta = \dfrac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. $(a+ib)^{m/n} + (a-ib)^{m/n} = 2(a^2+b^2)^{m/2n}\cos\left(\dfrac{m}{n}\tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right)$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

17. $p = \cos\theta + i\sin\theta$ ಮತ್ತು $q = \cos\phi + i\sin\phi$ ಎಂದಾದರೆ

$\dfrac{p-q}{p+q} = i\tan\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. $\cos\alpha + 2\cos\beta + 3\cos\gamma = 0 = \sin\alpha + 2\sin\beta + 3\sin\gamma$ ಆದಾಗ
$\cos 3\alpha + 8\cos 3\beta + 27\cos 3\gamma = 18\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ ಮತ್ತು
$\sin 3\alpha + 8\sin 3\beta + 27\sin 3\gamma = 18\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $[\cos\theta+\cos\phi+i(\sin\theta+\sin\phi)]^n$

$+[\cos\theta+\cos\phi-i(\sin\theta+\sin\phi)]^n$

$=2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cos n\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(-1+i)^{1/3}$ (ii) $\left(\sqrt{3}+3\right)^{1/3}$ (iii) $(i)^{1/4}$

(iv) $(-1)^{1/3}$ (v) $(-2-2i)^{1/4}$ (vi) $(1-i\sqrt{3})^{1/3}$

(vii) $(-16)^{\frac{1}{4}}$ (viii) $27^{\frac{1}{3}}$ (ix) $(-343)^{\frac{1}{3}}$

21. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x^6+x^4-x^2-1=0$

(ii) $x^9-x^5+x^4-1=0$

(iii) $x^{12}-x^6+1=0$

(iv) $x^3-3=0$

(v) $x^5-x^3+x^2-1=0$

(vi) $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

22. $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. $x^2-2x-4=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿದ್ದರೆ $\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos n\frac{\pi}{3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

24. $p=\frac{(1+i)\sqrt{3}-(1-i)}{2\sqrt{2}}$ ಆದರೆ $p^{\frac{1}{6}}$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಆರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 10

ಅವಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಅವಕಲಶಾಸ್ತ್ರ (Differential Calculus) ಮತ್ತು ಅನುಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ (Integral Calculus)ಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಕೀರ್ತಿ ಆಂಗ್ಲ ಗಣಿತಜ್ಞ ಹಾಗೂ ಭೌತ ವಿಜ್ಞಾನಿಯಾದ ಸರ್ ಐಸಕ್‌ನ್ಯೂಟನ್‌ಗೂ(Isaac Newton, 1642-1727) ಮತ್ತು ಜರ್ಮನ್ ದೇಶದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಹಾಗೂ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿಯಾದ ಗಾಟೆಫ್ರೇಡ್ ವಿಲ್‌ಹೆಲ್ಮ್ ಲೈಬ್ನಿಜ್ (G.W.Leibniz, 1646-1716)ಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ ನ್ಯೂಟನ್ ಮತ್ತು ಲೈಬ್ನಿಜ್‌ರಿಗಿಂತ ಸುಮಾರು ಐನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಎರಡನೇ ಭಾಸ್ಕರನು (ಜನ್ಮ: ಕ್ರಿ.ಶ.1114) ಆತನ **'ಸಿದ್ಧಾಂತ ಶಿರೋಮಣಿ'**ಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅವನಿಗಿಂತ ಹಿಂದೆ ಮಂಜುಲಾ(ಮುಂಜಾಲಾ)ಚಾರ್ಯನು (ಕ್ರಿ.ಶ.932) ತನ್ನ '**ಲಘುಮಾನಸ**' ದಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಚಂದ್ರನ 'ತಾತ್ಕಲಿಕಗತಿ'ಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

10.1 ನಿಷ್ಪನ್ನ

ಎರಡು ಚರಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಯಾವುದಾದರೂ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾಗ, ಒಂದು ಚರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಚರವು ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಉದ್ದೇಶ. ವಿಜ್ಞಾನ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದವುಗಳಲ್ಲಿ ಚರಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಅನೇಕ ಪ್ರಸಂಗಗಳು

ಬರುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಚರವು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಬೆಲೆಗೆ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದಿದಾಗ ದೊರಕುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಬೆಲೆಯನ್ನು 'ಹೆಚ್ಚುವರಿ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಧನಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಋಣಬೆಲೆಯೂ ಆಗಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ x ಚರವು 2.01ರಿಂದ 2.02ಗೆ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದಿದಾಗ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯು 0.01 'ಧನಬೆಲೆ' ಯಾಗಿರುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ xಚರವು 2.9ರಿಂದ 2.8ಕ್ಕೆ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದಿದಾಗ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯು -0.1 'ಋಣಬೆಲೆ'ಯಾಗುವುದು. ಈ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು Δx ಅಥವಾ δx ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೆಚ್ಚುವರಿಯು ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೆಚ್ಚುವರಿಯು y, u, v ಮುಂತಾದ ಚರಗಳಿಗೆ Δy, Δu ಮತ್ತು Δv ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$y = f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಚರಗಳಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ y ಚರವು x ಚರವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. xನ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳು yನ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆಯೂ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $y = 2x + 3$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$x = 2$ ಆದಾಗ $y = 7$ ಆಗುವುದು.

$x = 3$ ಆದಾಗ $y = 9$ ಆಗುವುದು.

$x = 5$ ಆದಾಗ $y = 13$ ಆಗುವುದು.

x ಬೆಲೆಯು 2 ರಿಂದ 3ಕ್ಕೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ xನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ $+1$ ಆಗಿದ್ದು yನ ಬೆಲೆಯು 7ರಿಂದ 9ಕ್ಕೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗಿ yನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ $+2$ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಅವಲಂಬಿತ ಚರ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರದ ಬದಲಾವಣೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುವುದು.

xನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಬೆಲೆ Δx ಆಗಿ yನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆದಾಗ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ನ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಿತಿಯನ್ನು $\Delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು yನ ಅವಕಲನದ ಸಹಾಂಕ (differential coefficient)

ಅಥವಾ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಅಥವಾ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ (derivative) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dy}{dx}$$

ಈ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\frac{dy}{dx}$ ಅಥವಾ y' ಅಥವಾ y_1 ಅಥವಾ Dy ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿರುತ್ತೇವೆ.

10.2 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ

$$y = f(x) \qquad \dots (1)$$

ಎಂಬ ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. xನಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ yನಲ್ಲಿಯೂ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು ತರುವುದು. $x \to (x + \Delta x)$ ಆದಾಗ $y \to (y + \Delta y)$ ಆಗುವುದು. Δx ಮತ್ತು Δy ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ಧನ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad \dots (2)$$

ಸಮೀಕರಣ (2)ರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \text{ಆಗುವುದು.}$$

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ Δx ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವಂತೆ (ಆದರೆ $\Delta x \neq 0$) ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{ಆಗುವುದು.}$$

ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗದ ಮಿತಿಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಇದನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\frac{dy}{dx}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ **ಅವಕಲ್ಯ** (differentiable) ಆಗಬೇಕಾದರೆ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

ಮಿತಿಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

ಈ ರೀತಿ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಒಂದು ಬಿಂದು xನಲ್ಲಿ ಆದ ತಾತ್ಕಲಿಕ (instantaneous) ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನ ಅಥವಾ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕೇತಗಳಲ್ಲಿ $\frac{d}{dx}[f(x)]$, $f'(x)$, $Df(x)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

10.3 ಬಲ ಮತ್ತು ಎಡ ನಿಷ್ಪನ್ನ (ನಿಷ್ಪತ್ತಿ)ಗಳು

(i) $y = f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ **ಬಲ** ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ (ನಿಷ್ಪನ್ನ)ವನ್ನು $x = a$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ:

$$Rf'(x)\Big|_{x=a} = \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]$$

(ಮಿತಿ ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ)

($h \to 0^+$ ಎಂದರೆ h ಎನ್ನುವುದು 0ವನ್ನು ಧನಬೆಲೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮೀಪಿಸುವುದು)

(ii) ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ನ **ಎಡ** ನಿಷ್ಪನ್ನ

$$Lf'(x)\Big|_{x=a} = \lim_{h\to 0^-}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]$$

(ಮಿತಿ ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ)

($h \to 0^-$ ಎಂದರೆ h ಎನ್ನುವುದು 0ವನ್ನು ಋಣ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುವುದು.)

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ ಎನ್ನುವುದು a ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಯೋಗ್ಯ(ಅವಕಲ್ಯ)ವಾಗಲು $Lf'(x)\Big|_{x=a} = Rf'(x)\Big|_{x=a}$ ಆಗಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ಆದಾಗ ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿಷ್ಪನ್ನ ಯೋಗ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಈಗ $Rf'(x)\Big|_{x=0} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x+0)-f(0)}{x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\frac{x}{1+e^{1/x}} - 0}{x}\right] \qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} \to \frac{1}{\infty} \to 0$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\quad Lf'(x)\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x+0)-f(0)}{x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{\frac{x}{1+e^{1/x}} - 0}{x}\right] \qquad = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$\left[\because \text{ as } \; x \to 0^-, \frac{1}{x} \to -\infty.\ e^{-\infty} \to 0\right]$

$\therefore f(x)$ ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯವಲ್ಲ.

10.4 ನಿಷ್ಪನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಗಳ ಸಂಬಂಧ

ಪ್ರಮೇಯ: $f(x)$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=a$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಕಲ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, $x=a$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವುದು. ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವು (converse) ಸತ್ಯವಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ: ದತ್ತದಲ್ಲಿ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=a$ ನಲ್ಲಿ ಅವಕಲ್ಯವಾಗಿದೆ ಅಂದರೆ

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] \qquad \text{ಮಿತಿಯು}$$

ಲಭ್ಯವಿದೆ.

$f(x)$ ನ್ನು $x=a$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವೆಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾದರೆ, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಈಗ

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right] = \left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}.(x-a)\right] = f'(a)(0) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$\therefore \quad f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=a$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ: ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವು ನಿಜವಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, $x = a$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು $x = a$ ನಲ್ಲಿ ಅವಕಲ್ಯವಾಗ ಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ: $f(x) = |x|$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಈಗ

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{(x - 0)} \right]$$

ಇದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.

$f(x) = |x| = x, \quad x \geq 0$ ಮತ್ತು

$f(x) = |x| = -x, \quad x \leq 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{(x - 0)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{(ಬಲನಿಷ್ಪನ್ನ)}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{(x - 0)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{(ಎಡನಿಷ್ಪನ್ನ)}$$

ಅಂದರೆ $\quad Rf'(0) \neq Lf'(0)$.

$f'(0)$ ಲಭ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 0$ ನಲ್ಲಿ $f(x)$ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

10.5 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

10.5.1 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ x^n ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

x^n ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು (x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ) ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ)

$$y = x^n \qquad \dots (1)$$

ಹಾಗೂ Δx ಎನ್ನುವುದು x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯಾಗಿರಲಿ. ಅವಲಂಬಿತ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, $x \to (x + \Delta x)$ ಆದಾಗ $y \to (y + \Delta y)$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \qquad \ldots (2)$$

ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು (2)ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ,

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - (x^n)$$

ಇದನ್ನು Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x} \right]$$

ಮಿತಿಯ ಫಲಿತಾಂಶ $\lim_{x \to a} \left[\frac{x^n - a^n}{x - a} \right] = na^{n-1}$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

ಅಂದರೆ $$\boldsymbol{\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}}$$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

1. $\frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$

2. $\frac{d}{dx}(x^5) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$

3. $\frac{d}{dx}(x^{-3}) = -3 \cdot x^{-3-1} = -3 \cdot x^{-4}$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$

5. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-1/2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

10.5.2 ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$$y = c \qquad \text{... (1)}$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. c =ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಥಃ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ yನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗುವುದು.

$$\therefore \quad y+\Delta y = c \qquad \text{... (2)}$$

$(2)-(1) \Rightarrow \Delta y = 0$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0 \quad (\Delta x \neq 0)$

$$\therefore \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=0, \qquad \frac{d(c)}{dx}=0$$

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಶೂನ್ಯ.

10.5.3 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y=u+v$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

u ಮತ್ತು v ಗಳು ಎರಡು x ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ $\quad y=u(x)+v(x) \qquad$ ... (1)

x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy, u ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δu ಮತ್ತು v ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δv ಆಗುವುವು.

$$\therefore \quad y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v) \qquad \text{... (2)}$$

$(2)-(1) \Rightarrow \Delta y=\Delta u+\Delta v$

$\div \Delta x,\qquad \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

$\Delta x \to 0$ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

ಅಂದರೆ $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$

i.e., $\dfrac{d}{dx}(u+v)=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$\frac{d}{dx}(u+v+w+p+\cdots)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\frac{dp}{dx}+\cdots$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು $\dfrac{d}{dx}(u-v)=\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dx}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

10.5.4 ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y=cu$, $c=$ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ, $u=x$ ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ $\dfrac{dy}{dx}=c\dfrac{du}{dx}$ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

$u=u(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು c ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. cu ಎನ್ನುವುದು ಗುಣಲಬ್ಧ.

$$y=cu \qquad \ldots (1)$$

Δx ಎನ್ನುವುದು x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯಾದಾಗ, Δy ಎನ್ನುವುದು y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಮತ್ತು Δu ಎನ್ನುವುದು u ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಆಗುವುದು.

$$y+\Delta y=c(u+\Delta u) \qquad \ldots (2)$$

$(2)-(1) \Rightarrow \Delta y=c\Delta u$

$$\div \Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ಅಂದರೆ $$\frac{dy}{dx} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

i.e. $$\frac{dy}{dx} = c \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}}$$

10.5.5 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

u ಮತ್ತು *v* ಎರಡು *x* ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿದ್ದು (*uv*) ಗುಣಲಬ್ಧವಾದಾಗ,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$ ಆಗುವುದು.

$$y = uv \qquad \dots (1)$$

ಆಗಿರಲಿ. *x*ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ *y*, *u* ಮತ್ತು *v*ಗಳ ಹೆಚ್ಚುವರಿಗಳು $\Delta y, \Delta u$ ಮತ್ತು Δv ಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \quad y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \qquad \dots (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \quad \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

$$= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v + uv - uv$$

$$= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$\div \Delta x, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}.\Delta v$$

$\Delta x \to 0$ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}.\Delta v \right)$$

ಅಂದರೆ, $$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\cdot(0)$$

ಅಥವಾ $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ಇದನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx}.$$

10.5.6 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

u ಮತ್ತು vಗಳು xನ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿದ್ದು, $\frac{u}{v}$ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \left[\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}\right]$$ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ

$$y = \frac{u}{v} \qquad \ldots (1)$$

ಆಗಿರಲಿ, xನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆಗಿ yನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಮತ್ತು Δu ಮತ್ತು Δv ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ u ಮತ್ತು vಗಳ ಹೆಚ್ಚುವರಿಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \qquad \ldots (2)$$

$(2) - (1) \Rightarrow$ $$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

$\div \Delta x$, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{(v + \Delta v)v}$$

$\Delta x \to 0$ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left(v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)}{(v + \Delta v)v} \right]$$

$\Delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\Delta v \to 0$ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{(v + \Delta v)v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(v + 0)v} \left[v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right]$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \left[\frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \right]$$

10.5.7 e^x ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$$y = e^x \qquad \ldots (1)$$

x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದರೆ, Δy ಎಂಬುದು y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಆಗುವುದು

$$\therefore \quad y + \Delta y = e^{x + \Delta x} \qquad \ldots (2)$$

$$(2) - (1) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = e^{x + \Delta x} - e^x$$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\left(e^{x + \Delta x} - e^x\right)}{\Delta x}$

$\Delta x \to 0$ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{e^x . e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \right] = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x (1) \qquad \left[\because \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \log_e e = 1 \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \therefore \quad \frac{de^x}{dx} = e^x$$

10.5.8 a^x ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = a^x$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \log_e a$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y = a^x \quad \ldots (1)$$

ಆಗಿದ್ದು xನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ, Δy ಎಂಬುದು yನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಆಗಿರಲಿ.

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x} \quad \ldots (2)$$

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$

$\div \Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}\right]$

$\Delta x \to 0$, ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}\right]$$

$$= a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \log_e a \quad \left[\because \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a\right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \log_e a$$

10.5.9 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ $\log_e x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = \log_e x$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ

$$y = \log_e x \qquad ...(1)$$

Δx, x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯಾದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರಲಿ.

$$y + \Delta y = \log_e (x + \Delta x) \qquad ...(2)$$

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = \log_e (x + \Delta x) - \log_e x$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{\log_e (x + \Delta x) - \log_e x}{\Delta x}\right]$

ಮಿತಿ $\Delta x \to 0$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\log_e (x + \Delta x) - \log_e x}{\Delta x}\right]$$

ಅಂದರೆ $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \left\{\log_e \left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)\right\}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \left[\log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$= \frac{1}{x} \log_e \left\{\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}$$

$$= \frac{1}{x} \log_e e \qquad \left[\because \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x} \qquad [\because \log_e e = 1]$$

10.5.10 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

(ಅ) $\sin x$

$$y = \sin x \qquad \ldots (1)$$

ಆಗಿರಲಿ x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \qquad \ldots (2)$$

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

ಮಿತಿಯನ್ನು $(\Delta x \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2\cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right)\sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)}{\Delta x}\right]$$

$$\left[\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C + D}{2}\sin\frac{C - D}{2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) . \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\right]$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) . \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \times \frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{2x+0}{2}\right).1\times\frac{1}{2} \quad \left[\because \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right] = 1$$

$$= \cos\left(\frac{2x}{2}\right)$$

ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dx} = \cos x.$

i.e. $\mathbf{\frac{dy}{dx}(\sin x) = \cos x.}$

(ಆ) cos x

$$y = \cos x \qquad \ldots (1)$$

ಆಗಿರಲಿ x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) \qquad \ldots (2)$$

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

ಮಿತಿಯನ್ನು $(\Delta x \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-2\sin\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right).\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x}\right]$$

$$\left[\because \cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\right]$$

$$= -2\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \times \frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{2x+0}{2}\right).1 \times \frac{1}{2}$$

$$= -\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$

ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dx} = -\sin x.$ $\therefore$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$

(೩) **$\tan x$**

$y = \tan x$ . . . (1)

ಆಗಿರಲಿ x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $y + \Delta y = \tan(x + \Delta x)$ . . . (2)

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = \tan(x + \Delta x) - \tan x$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಮಿತಿಯನ್ನು $(\Delta x \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}\right]$$

ಅಂದರೆ $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\tan(x+\Delta x - x)(1+\tan(x+\Delta x)\tan x}{\Delta x}\right]$$

$[\because \tan A - \tan B = \tan(A-B)(1+\tan A \tan B]$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}(1+\tan(x+\Delta x)\tan x)$$

$$= 1.(1+\tan(x+0)\tan x) \qquad \left[\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1\right]$$

$$= 1(1+\tan^2 x) = \sec^2 x$$

$[\because 1+\tan^2 x = \sec^2 x]$

i.e. $\quad \mathbf{\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$.

(ಈ) cosec x

$$y = \operatorname{cosec} x \qquad \ldots (1)$$

ಆಗಿರಲಿ x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad y + \Delta y = \operatorname{cosec}(x+\Delta x) \qquad \ldots (2)$$

$(2)-(1) \Rightarrow \Delta y = \operatorname{cosec}(x+\Delta x) - \operatorname{cosec} x$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಮಿತಿಯನ್ನು $(\Delta x \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\operatorname{cosec}(x+\Delta x) - \operatorname{cosec} x}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\dfrac{1}{\sin(x+\Delta x)} - \dfrac{1}{\sin x}}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x - \sin(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot \sin(x+\Delta x) \cdot \sin x} \right]$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sin(x+\Delta x).\sin x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \right]$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\sin(x+\Delta x).\sin x} \right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x} \right]$$

$$= -2 \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\sin x} \right]$$

$$\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right]$$

$$= -2 . \frac{1}{(\sin x . \sin x)} . \cos\left(\frac{2x}{2}\right) . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 . \frac{1}{\sin^2 x} . \cos x . 1 \times \frac{1}{2}$$

ಅಂದರೆ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin x} . \frac{1}{\sin x} = -\cot x . \operatorname{cosec} x$

i.e. $\quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\cot x . \operatorname{cosec} x}$

(ಉ) sec x

$y = \sec x \qquad \ldots (1)$

ಆಗಿರಲಿ x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad y + \Delta y = \sec(x + \Delta x) \ldots (2)$

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = \sec(x+\Delta x) - \sec x$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಮಿತಿಯನ್ನು $(\Delta x \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sec(x+\Delta x) - \sec x}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{1}{\cos x}}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cos x - \cos(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)\cos x \cdot \Delta x} \right]$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x).\cos x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \right]$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\cos(x + \Delta x).\cos x} \right] \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-2\sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right)\sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)}{\Delta x} \right]$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x)\cos x}(-2) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right]$$

$$= 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x)\cos x} \times \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] \times \frac{1}{2}$$

$$= 2.\frac{1}{\cos(x + 0)\cos x}.\sin\left(\frac{2x}{2}\right).1 \times \frac{1}{2}$$

ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.\sin x.$

i.e. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x} = \tan x.\sec x$

ಅಥವಾ $\mathbf{\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x.\sec x}$

(ಊ) **cot x**

$$y = \cot x \qquad \ldots (1)$$

ಆಗಿರಲಿ x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad y + \Delta y = \cot(x + \Delta x) \qquad \ldots (2)$$

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = \cot(x + \Delta x) - \cot x$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಮಿತಿಯನ್ನು $(\Delta x \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cot(x + \Delta x) - \cot x}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{\tan(x+\Delta x)} - \frac{1}{\tan x}}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\tan x - \tan(x + \Delta x)}{\tan(x + \Delta x) \cdot \tan x \, \Delta x} \right]$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\tan(x + \Delta x).\tan x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\tan(x + \Delta x) - \tan x}{\Delta x} \right]$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\tan(x + \Delta x).\tan x} \right] \times$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\tan(x + \Delta x - x)(1 + \tan(x + \Delta x)\tan x}{\Delta x} \right]$$

$$= -\frac{1}{(\tan x.\tan x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \tan(x + \Delta x)\tan x\right)$$

$$= -\frac{1}{\tan^2 x}.\sec^2 x$$

ಅಂದರೆ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

(ಋ) **sin(ax)**

$$y = \sin(ax) \quad \ldots (1)$$

ಆಗಿರಲಿ x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad y + \Delta y = \sin a(x + \Delta x) \quad \ldots (2)$$

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = \sin(ax + a\Delta x) - \sin ax$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಮಿತಿಯನ್ನು $(\Delta x \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin(ax + a\Delta x) - \sin ax}{\Delta x} \right]$$

ಅಂದರೆ, $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2\cos\left(\frac{ax+\Delta x+ax}{2}\right)\sin\left(\frac{ax+a\Delta x-ax}{2}\right)}{\Delta x} \right]$$

$$= 2.\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2ax + a\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{a\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2ax + a\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{a\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2ax + a\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{a\Delta x}{2}}{\frac{a\Delta x}{2}} \times \frac{a}{2}$$

$$= 2.\cos\left(\frac{2ax}{2}\right).1 \times \frac{a}{2}$$

ಅಂದರೆ $$\frac{dy}{dx} = (\cos ax)a$$

i.e. $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax}$.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ a ನ ಬದಲಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗಲೂ ಸಹ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. '$\sin ax$' ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ (ಆ) ನಿಂದ (ಊ)ನಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಂತೆ $\cos ax$, $\tan ax$, $\operatorname{cosec} ax$, $\cot ax$ ಮತ್ತು $\sec ax$ ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

i) $\dfrac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax$.

ii) $\dfrac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$.

iii) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} ax) = -a \operatorname{cosec} ax \cot ax$

iv) $\dfrac{d}{dx}(\sec ax) = a \sec ax \tan ax$

v) $\dfrac{d}{dx}(\cot ax) = -a \operatorname{cosec}^2 ax$

(ಎ) $e^{(ax)}$

$$y = e^{(ax)} \qquad \ldots(1)$$

ಆಗಿರಲಿ a ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ.

x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δx ಆದಾಗ y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿ Δy ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad y + \Delta y = e^{a(x+\Delta x)} \qquad \ldots(2)$$

$(2) - (1) \Rightarrow \Delta y = e^{a(x+\Delta x)} - e^{ax}$

Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಮಿತಿಯನ್ನು $(\Delta x \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{e^{(ax + a\Delta x)} - e^{ax}}{\Delta x} \right]$$

ಅಂದರೆ $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{e^{ax} . e^{a\Delta x} - e^{ax}}{\Delta x} \right]$$

$$= e^{ax} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{e^{a\Delta x} - 1}{\Delta x} \right]$$

$$= e^{ax} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{e^{a\Delta x} - 1}{a\Delta x} \times a \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax} .1 = ae^{ax}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}}$$

ಇದುವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು:

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$
3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$
5. $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x . \log_e a$
6. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$
7. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
8. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
9. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
10. $\frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \cot x$

11. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$

12. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

13. $\frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax$

14. $\frac{d}{dx}\cos ax = -a\sin ax$

15. $\frac{d}{dx}\tan ax = a\sec^2 ax$

16. $\frac{d}{dx}\sec ax = a\sec ax\tan ax$

17. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} ax = -a\operatorname{cosec} ax\cot ax$

18. $\frac{d}{dx}\cot ax = -a\operatorname{cosec}^2 ax$

19. $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$

20. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

21. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

22. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

23. $\frac{d}{dx}(u.v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

24. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

25. $\frac{d}{dx}(u.v.w) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$

10.5.11 ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಲ್ಲಿನ ಚರಗಳು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗದೆ ಮಿಶ್ರರೂಪ ಸಂಖ್ಯೆಚರಗಳಾದಾಗ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

$\sin(ix) = i\sinh x$ [$\sinh x$ ನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್ ಸೈನ್ ಮತ್ತು

$\cos(ix) = \cosh x$ [$\cosh x$ ನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್ ಕೊಸೈನ್)

ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್ ಸೈನ್ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ಎಂದು ಮತ್ತು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್ ಕೊಸೈನ್ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೂ ಸೇರಿದಂತೆ ಪಟ್ಟಿ ಹೀಗಿದೆ:-

1. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
4. $\text{cosech}\, x = \frac{1}{\sinh x}$
5. $\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x}$
6. $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$

ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಕ್ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\text{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$
3. $\text{cosech}^2 x = \coth^2 x - 1$
4. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$
5. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
6. $\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$
7. $\sinh^2 x = \left[\frac{\cosh 2x - 1}{2}\right]$
8. $2\tanh x = \frac{\sinh 2x}{1 + \sinh^2 x}$

10.5.12 ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

1. $\sinh x$

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x - (-e^{-x})\right] \quad = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x}$$

2. $\cosh x$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{de^x}{dx} + \frac{de^{-x}}{dx}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[e^x + (-e^{-x})] = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh x$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x}$$

3. $\tanh x$

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x \frac{d}{dx}(\sinh x) - \sinh x \frac{d}{dx}(\cosh x)}{(\cosh x)^2}$$

$$= \frac{\cosh x(\cosh x) - \sinh x(\sinh x)}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x}$$

4. $\coth x$

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sinh x \cdot \frac{d}{dx}(\cosh x) - \cosh x \frac{d}{dx}(\sinh x)}{(\sinh x)^2}$$

$$= \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{(\sinh x)^2}$$

$$= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-(\cosh^2 x - \sinh^2 x)}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{cosech}^2 x}$$

5. $\operatorname{sech} x$

$$y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cosh x}\right] = -\frac{1}{\cosh^2 x} \cdot \frac{d}{dx}[\cosh x]$$

$$= -\frac{1}{\cosh^2 x} \cdot \sinh x = -\tanh x \operatorname{sech} x$$

i.e. $$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\tanh x . \operatorname{sech} x}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{d}{dx}(\text{cosech } x) = -\text{cosech } x \coth x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

1. $y = 3x^5 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 4$

$$\frac{dy}{dx} = 3(5x^4) + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3(-2x^{-3}) + 0$$

$$= 15x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}$$

2. $y = \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x}\right)$

$$y = \frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{1}{x}; \quad y = x + 3 + \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 + 0 - \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

3. $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

4. $y = (2x + 3)(x^2 + 4x + 2)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (2x + 3)\frac{d}{dx}(x^2 + 4x + 2) + (x^2 + 4x + 2)\frac{d}{dx}(2x + 3)$$

$$= (2x+3)(2x+4) + (x^2+4x+2)(2)$$

$$= 4x^2 + 14x + 12 + 2x^2 + 8x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 22x + 16$$

5. $y = \sqrt{x}e^{5x} \tan x$

$\therefore$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}e^{5x} \frac{d}{dx} \tan x + e^{5x} \tan x \frac{d(\sqrt{x})}{dx} + \sqrt{x} \tan x \frac{d(e^{5x})}{dx}$$

$$= \sqrt{x}e^{5x} \cdot \sec^2 x + e^{5x} \tan x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \tan x \cdot 5e^{5x}$$

6. $y = \dfrac{1-x}{(1+x)}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)\frac{d}{dx}(1-x) - (1-x)\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)(-1) - (1-x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

7. $y = \dfrac{3+4\sin x}{4+3\sin x}$

$\therefore$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4+3\sin x)\frac{d}{dx}(3+4\sin x) - (3+4\sin x)\frac{d}{dx}(4+3\sin x)}{(4+3\sin x)^2}$$

$$= \frac{(4+3\sin x)(4\cos x) - (3+4\sin x)(3\cos x)}{(4+3\sin x)^2}$$

$$= \frac{16\cos x - 9\cos x}{(4+3\sin x)^2} = \frac{7\cos x}{(4+3\sin x)^2}$$

8. $y=\dfrac{xe^x}{(1+\cosh x)}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cosh x)\dfrac{d}{dx}(xe^x)-xe^x\dfrac{d}{dx}(1+\cosh x)}{(1+\cosh x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cosh x)(xe^x+e^x)-xe^x(\sinh x)}{(1+\cosh x)^2}$$

9. $y=\dfrac{(x+2)\sinh x}{(x^2+1)}$

$\therefore$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}\{(x+2)\sinh x)\}-(x+2)\sinh x\dfrac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)\{(x+2)\cosh x+\sinh x\}-(x+2)\sinh x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

10. $y=(3x+2)(x+7)$, $x=1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$$\frac{dy}{dx}=(3x+2)(1)+(x+7)(3)$$

$$=3x+2+3x+21$$

$$\frac{dy}{dx}=6x+23$$

$x=1$ ಆದಾಗ, $\dfrac{dy}{dx}=6(1)+23=6+23$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=29$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

I ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ 'x' ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

1. x^{15} 2. $\frac{1}{x^2}$ 3. $\sqrt{x+1}$ 4. $\frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{x^2}$

5. 5^x 6. e^{3x} 7. $\cot 4x$ 8. $\tan 3x$

9. $\log(3x+1)$ 10. $4\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$ 11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$

12. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 13. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$ 14. $\frac{1}{3^x}$

15. $4x^2 - 8\sin x + \log x$ 16. $(3x+5)(2x-3)$ 17. $\frac{x+2}{x-3}$

18. $x^2 \sin x$ 19. $\sqrt{x}\cos x$ 20. $\frac{1}{\sqrt{x}}\sec 3x \cdot \tan 2x$

21. $e^x \log x$ 22. $\sqrt{x}\,\mathrm{cosec}\,x$ 23. $x + \frac{1}{x}$

24. $\sin(3x+5)\log x$ 25. $\frac{a+b\sin x}{b+a\sin x}$ 26. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

27. $\frac{2-\tan x}{2+\tan x}$ 28. $\frac{x\log x}{1+\sin x}$ 29. $\frac{3^x+1}{x^3+1}$ 30. $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

31. $\frac{3+2\cos x}{2-3\sin x}$ 32. $\frac{x^3\tan x}{1+x}$ 33. $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}$

34. $\frac{(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} + \frac{\cos x}{(\cos x + \sin x)}$ 35. $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$

36. $e^{\log(1+e^{\log x})}$ 37. $\frac{(x+2)\sin x}{(x^2+1)}$

38. $u = \sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} + 1$ ಆದರೆ $\frac{du}{dr}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

39. $f(x)=x\tan x$ ಆದರೆ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ಮತ್ತು $f'(0)$ ಬೆಲೆಯೇನು?

40. $y=\sec x+\tan x$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=y\sec x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

II ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಮೂಲತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ 'x'ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\sin 6x$	(2) $\tan 3x$	(3) $\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$
(4) $\cos\sqrt{x}$	(5) $\sin x^2$	(6) $\sqrt[8]{x^3}$
(7) $\sqrt{\sin x}$	(8) $e^{8x/3}$	(9) $\log_e 4x$
(10) 10^x	(11) $(3x+5)$	(12) 2^{-x}
(13) $\cot ax$	(14) $(px+q)$	(15) $\sin^2 x$

10.6 ಸಂಯುಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು: (ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ)

$y=f(u)$ ಮತ್ತು $u=g(x)$ ಇದ್ದಾಗ y ಎನ್ನುವುದು x ನಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವುದು.

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $\delta x\to 0, \delta u\to 0$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿದಾಗ

$y=f(u),\ u=g(t),\ t=h(w),\ w=p(x)$ ಆದಾಗ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \sin(\log x)$

$u = \log x$ ಆದಾಗ $y = \sin u$ ಆಗುವುದು.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin u \\ \therefore \quad \frac{dy}{du} &= \cos u \end{aligned}\right\} \begin{aligned} u &= \log x \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

2. $y = e^{\cos(1+x^2)}$

$y = e^u$, $u = \cos(t)$, $t = 1 + x^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}(e^u) \cdot \frac{d}{dt}\cos(t) \cdot \frac{d}{dx}(1 + x^2)$$

$$= e^u \cdot (-\sin t)(2x)$$

$$= e^{\cos(1+x^2)}[-\sin(1 + x^2)] \cdot 2x$$

3. $y = x^2 \tanh^3 x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\tanh^3 x) + \tanh^3 x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot 3\tanh^2 x \ \text{sech}^2 x + \tanh^3 x \cdot (2x)$$

4. $y = \log\left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)$

$$y = \log u, \quad u = \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)}\left[\frac{(1-x^2)(2x)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)(1-x^2)}[2x - 2x^3 + 2x + 2x^3]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(1-x^4)}$$

5. $y = \sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}$

$$y = \sqrt{\frac{2\sin^2 x/2}{2\cos^2 x/2}}$$

$$y = \tan\frac{x}{2}$$

$$y = \tan u, \quad u = \frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \sec^2 u \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

6. $y = \sqrt{1-x^2}$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = (1-x^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-2x) \quad =\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

7. $y=e^{x^2}\cdot e^{3^{\log x}}$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x^2}\cdot\frac{d}{dx}e^{3^{\log x}}+e^{3^{\log x}}\cdot\frac{de^{x^2}}{dx}$$

$$=e^{x^2}\cdot e^{3^{\log x}}\cdot\frac{d}{dx}3^{\log x}+e^{3^{\log x}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x$$

$$=e^{x^2}\cdot e^{3^{\log x}}\cdot 3^{\log x}\cdot\frac{1}{x}+2xe^{x^2}\cdot e^{3^{\log x}}$$

8. $y=e^{\sqrt{\log x}}$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\sqrt{\log x}}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{\log x}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\sqrt{\log x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\log x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\sqrt{\log x}}}{2x\sqrt{\log x}}$$

9. $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)$$

10. $y=\log(x+\sqrt{1+x^2})$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}\cdot\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)\right)$$

$$=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

11. $y=\log\left(\frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}\right)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{2ab}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}$

$$y=\log(a+b\tan x)-\log(a-b\tan x)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{(a+b\tan x)}\cdot\frac{d}{dx}(a+b\tan x)$$

$$-\frac{1}{(a-b\tan x)}\cdot\frac{d}{dx}(a-b\tan x)$$

$$=\frac{b\sec^2 x}{(a+b\tan x)}-\frac{(-b\sec^2 x)}{(a-b\tan x)}$$

$$=\frac{b\sec^2 x(a-b\tan x)+b\sec^2 x(a+b\tan x)}{(a+b\tan x)(a-b\tan x)}$$

$$=\frac{ab\sec^2 x+ab\sec^2 x}{(a^2-b^2\tan^2 x)}$$

$$=\frac{2ab\sec^2 x}{(a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x)/\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2ab}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}$$

12. $y=\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^m$ ಆದರೆ $\sqrt{x^2+a^2}\,\frac{dy}{dx}=my$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$y=\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^m$$

$$\frac{dy}{dx}=m\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^{m-1}\cdot\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$=m\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}(2x)\right)$$

$$=m\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^{m-1}\frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{m\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^m}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{my}{\sqrt{x^2+a^2}}\qquad\because\ y=\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^m$$

$$\therefore\quad\sqrt{x^2+a^2}\,\frac{dy}{dx}=my$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

I ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು 'x'ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

1. $\sqrt{x^3+1}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ 3. $\left(2x^2-x+3\right)^3$

4. $\frac{1}{(2x^2+1)^2}$ 5. $\tan^3(x^2+x+1)$ 6. $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

7. $\log(\text{sech}\, x)$ 8. $e^{\sqrt{\tan x}}$ 9. $\log_{10}\sin x$

10. $\log\left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)$ 11. $\text{cosec}(x^2+1)$ 12. $\sqrt{\cosh(e^x)}$

13. $\text{cosech}^4\sqrt{x+1}$ 14. $\sin^2(e^x)$ 15. $\tan\sqrt{x^2+1}$

16. $\log.\log(\log x)$ 17. $\log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 18. $\sin(\log\tan x)$

19. $e^{\sqrt{\log\sqrt{\tan x}}}$ 20. $e^{\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ 21. $x^3 e^{\sqrt{x}}\log\sin x$

22. $e^{\sin x}\log\sqrt{\tan x}$ 23. $e^{x\cot x}$ 24. $e^{\sqrt{x^2+1}}+e^{1/x^2}$

25. $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 26. $\log(1+\sin 2x)$ 27. $\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

28. $\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ 29. $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

30. $a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$

10.7 ವಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

$y = f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = f^{-1}(y)$ ಎಂದು ಆಗುವುದು.

$f^{-1}(y)$ ನ್ನು ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುವರು

$y = f^{-1}(x)$ ಆದರೆ $x = f(y)$ ಆಗುವುದು.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}f(y) = f'(y)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1. $y = \sin^{-1} x$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\therefore \quad x = \sin y$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ಅಥವಾ

$$y = \sin^{-1} x \qquad \therefore \quad \sin y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\text{i.e. } \cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. $y = \cos^{-1} x$

$$\therefore \quad \cos y = x$$

$$\frac{d}{dy}\cos y = \frac{dx}{dy}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $y = \tan^{-1} x$

$\therefore \quad x = \tan y$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

4. $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

$\therefore \quad x = \operatorname{cosec} y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec} y \cdot \cot y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosec} y \cot y}$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{cosec} y\sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

5. $y = \sec^{-1} x$

$\therefore \quad x = \sec y$

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \tan y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

6. $y = \cot^{-1} x$

$\therefore \quad x = \cot y$

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec}^2 y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 y} \quad = \frac{-1}{1 + \cot^2 y}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

7. $y = \sin^{-1} x$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

$y = \sin^{-1} x$ ಆದರೆ $x = \sin y$ ಆಗುವುದು.

'Δx', x ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯಾದರೆ, 'Δy' y ನ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯಾಗುವುದು.'

$\therefore \quad x + \Delta x = \sin(y + \Delta y)$

$\therefore \quad \Delta x = \sin(y + \Delta y) - \sin y$

$$\div \Delta y, \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\sin(y + \Delta y) - \sin y}{\Delta y}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{y + \Delta y + y}{2}\right)\sin\left(\frac{y + \Delta y - y}{2}\right)}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 2 \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \cos\left(\frac{2y + \Delta y}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin(\Delta y / 2)}{(\Delta y / 2) \times 2}$$

$$\frac{dx}{dy} = 2\cos\left(\frac{2y}{2}\right) \cdot 1 \times \frac{1}{2} = \cos y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ವಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \log(\tan^{-1} x)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = \log(\tan^{-1} x)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) \quad = \frac{1}{\tan^{-1} x}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1} x}$$

2. $y = e^{m\sin^{-1} x}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = e^{m\sin^{-1} x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{m\sin^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx}(m\sin^{-1} x)$$

$$= e^{m\sin^{-1} x} \cdot m \cdot \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$$

$$= e^{m\sin^{-1} x} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore \quad \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = my$$

3. $y = x\operatorname{cosec}^{-1}x + \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec}^{-1}x$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$y = x\operatorname{cosec}^{-1}x + \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) + \operatorname{cosec}^{-1}x\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= x\left(\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}\right) + \operatorname{cos}ec^{-1}x(1) + \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\cdot\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{cos}ec^{-1}x + \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{cosec}x^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec}^{-1}x$$

4. $y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

5. $y = \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right]$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\frac{(a-b)}{(a+b)}\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(a-b)}{a+b+a\tan^2\frac{x}{2}-b\tan^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} \cdot \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a+b}\right)\left(\sqrt{a-b}\right)}{a\sec^2\frac{x}{2}+b-b\tan^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\left(\sec^2\frac{x}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2} \cdot \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)}{a+b\cos^2\frac{x}{2}-b\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2\left[a+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2[a+b\cos x]}$$

6. $x = 2a\sin^{-1}\sqrt{\frac{y}{2a}} - \sqrt{2ay-y^2}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$x = 2a\sin^{-1}\sqrt{\frac{y}{2a}} - \sqrt{2ay - y^2}$$

yಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dx}{dy} = 2a \cdot \frac{d}{dy}\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{y}{2a}}\right) - \frac{d}{dy}\left(\sqrt{2ay - y^2}\right)$$

$$= 2a\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{2a}}} \cdot \frac{d}{dy}\sqrt{\frac{y}{2a}} - \frac{1}{2\sqrt{2ay-y^2}}\frac{d}{dy}\left(2ay - y^2\right)$$

$$= 2a\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-y}}\frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{2ay-y^2}}(2a-2y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}} - \frac{(a-y)}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2a-y}}{\sqrt{y}}$$

7. $y = \cos^{-1}\left[\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right]$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = +\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b+a\cos x)}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

$$= \frac{-(b+a\cos x)}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}$$

$$\left[\frac{(b+a\cos x)(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^2}\right]$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{b^2 + 2ab\cos x + a^2\cos^2 x - a^2 - 2ab\cos x - b^2\cos^2 x}}$$

$$\left[\frac{-b^2 \sin x - ab\sin x\cos x + a^2\sin x + ab\sin x\cos x}{(b + a\cos x)}\right]$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\left(b^2 - a^2\right) - \cos^2 x\left(b^2 - a^2\right)}} \frac{\sin x(a^2 - b^2)}{(b + a\cos x)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{b^2 - a^2}\left(\sqrt{1 - \cos^2 x}\right)} \cdot \frac{\left(a^2 - b^2\right)}{(b + a\cos x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{(b + a\cos x)}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

I ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ

1. $y = 3\sin^{-1} x - 4\tan^{-1} x + 3\cos^{-1} x - 4\cot^{-1} x$
2. $y = \sec^{-1} x + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $y = \sqrt{x}\tan^{-1} x$
4. $y = e^x \cos^{-1} x$
5. $y = \frac{\sin^{-1} x}{x}$
6. $y = x^2 \operatorname{cosec}^{-1} x$
7. $y = \tan^{-1}\sqrt{x - 1}$
8. $y = \sqrt{\sin\left(m\sin^{-1} x\right)}$
9. $y = \tan^{-1}\left(\frac{4\sin x}{3 + 5\cos x}\right)$
10. $y = \sin(m\cos^{-1} x)$

11. $y = \cos^{-1}\left[\dfrac{1+2\cos x}{2+\cos x}\right]$

12. $y = \dfrac{2}{5}\tan^{-1}\left[\dfrac{1}{5}\tan\dfrac{x}{2}\right]$

13. $y = \sin(2\sin^{-1} x)$

14. $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

15. $y = \tan^{-1}\left\{\dfrac{1-x}{1+x}\right\}$

16. $y = \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x^3}}\right]$

17. $y = \dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$

18. $y = \dfrac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

19. $y = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

20. $y = \log\dfrac{a+b\tan x}{a-b\tan x}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ab}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10.8 ವಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಆದೇಶಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ವಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬದಲಿಗೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಆದೇಶದಂತೆ ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದು ನಂತರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $\theta = \tan^{-1} x$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\frac{\theta}{2}\right]$$

$$y = \frac{\theta}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot\tan^{-1} x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}$$

2. $y = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

$x = \cos\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $\theta = \cos^{-1} x$ ಆಗುವುದು

$$y=\cos^{-1}(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$y=\cos^{-1}(\cos 3\theta)$$

$$y=3\theta$$

$$y=3\cos^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$$

$$=3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $y=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

$$y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\tan^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right)\ =\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$y=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$$

4. $y=\tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\right]$

$$y=\tan^{-1}\left[\frac{a-b\tan x}{b+a\tan x}\right]$$

[$\cos x$ ನಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು ಭಾಗಿಸಬೇಕು]

$$y=\tan^{-1}\left[\frac{a/b-\tan x}{1+a/b\tan x}\right]$$

$\frac{a}{b} = \tan\alpha$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\tan\alpha - \tan x}{1 + \tan\alpha \tan x}\right]$$

$$= \tan^{-1}[\tan(\alpha - x)]$$

$$y = \alpha - x$$

$$y = \tan^{-1}\frac{a}{b} - x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0 - 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -1$$

5. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $\theta = \tan^{-1} x$ ಆಗುವುದು.

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1}\right)$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$y = 2\theta$$

$$y = 2\tan^{-1} x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}$$

6. $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}\right]$

$x^2 = \cos\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $\theta = \cos^{-1} x^2$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$\left[\because 1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}, 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}\right] \quad = \tan^{-1}\left[\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}\right] \quad = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$y = \frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}\right)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

7. $$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $\theta = \tan^{-1} x$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sec\theta}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\sin^{-1}(\cos\theta)+\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\theta+\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\theta+\frac{\theta}{2}$$

$$y=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2(1+x^2)}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

I ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

1. $y=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

2. $y=\tan^{-1}\left[\frac{a+x}{1-ax}\right]$

3. $y=\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$

4. $y=\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right]$

5. $y = \sec^{-1}\left[\frac{1+x^2}{1-x^2}\right]$

6. $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right]$

7. $y = \tan^{-1}\left[\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right]$

8. $y = \tan^{-1}\left[\frac{2+3\tan x}{3-2\tan x}\right]$

9. $y = \cos^{-1}\left(1-2x^2\right)$

10. $y = \sec^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

11. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

12. $y = \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

14. $y = \tan^{-1}\left[\sqrt{1+x^2}-x\right]$

15. $y = \tan^{-1}\left[\frac{bx-a}{ax+b}\right]$ [ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು 'b'ಯಿಂದಭಾಗಿಸಿ]

16. $y = \tan^{-1}\left[\frac{3+4x}{4-3x}\right]$

17. $y = \sec^{-1}\left[\frac{1}{1-2x^2}\right]$

18. $y = \cot^{-1}\left[\frac{2-5x}{5+2x}\right]$

10.9 ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಯ ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

1. $y = \sinh^{-1} x$

$\therefore \quad x = \sinh y$

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

2. $y = \cosh^{-1} x$

$\therefore \quad x = \cosh y$

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

3. $y = \tanh^{-1} x$

$\therefore \quad x = \tanh y$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 - \tanh^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}}$$

4. $y = \coth^{-1} x$

$$\therefore \quad x = \coth y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosech}^2 y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosech}^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\coth^2 y - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2 - 1}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{-1}{x^2 - 1}}$$

5. $y = \operatorname{sech}^{-1} x$

$$\therefore \quad x = \operatorname{sech} y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{sech} y \tanh y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{sech} y \tanh y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\text{sech } y\sqrt{1-\text{sech}^2 y}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

6. $y = \text{cosech}^{-1} x$

$\therefore \quad x = \text{cosech } y$

$$\frac{dx}{dy} = -\text{cosech } y \coth y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\text{cosech } y \coth y}$$

$$= \frac{-1}{\text{cosech } y\sqrt{1+\text{cosech}^2 y}} \qquad = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cosech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.5

ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು 'x' ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ:

1. $y = \tan^2 x \tanh^{-1} x$

2. $y = \dfrac{\text{sech}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $y = \sinh^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

4. $y = \dfrac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}$

5. $y = -\dfrac{a^2}{2}\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}$

6. $y = \sqrt{x^2+1}\sinh^{-1} x$

7. $y = \text{cosech}^{-1}(\tan x)$

8. $y = \sinh^{-1}(\cos x)$

9. $y = \log x + \tanh x \sinh^{-1} x$

10. $y = (1 + x^2)\sinh^{-1} x$

10.10 ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ

x ಮತ್ತು y ಗಳ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಒಂದು ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನ $f(x, y) = 0$ ಇರಲಿ. ಈ ಸಂಬಂಧ ತೋರಿಸುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ $\frac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

1. $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^2 + 3xy + 2y^2) = \frac{d(4)}{dx}$$

$$2x + 3\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(3x + 4y) = -(2x + 3y)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + 3y)}{(3x + 4y)}$$

2. $e^x + e^y = e^{x+y}$

$\div e^{x+y}$

$$\frac{e^x}{e^{x+y}} + \frac{e^y}{e^{x+y}} = 1$$

$$\therefore \quad e^{-y} + e^{-x} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-y}\right) + \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$e^{-y}\left(-\frac{dy}{dx}\right)+e^{-x}(-1)=0$$

$$\therefore \quad -e^{-y}\frac{dy}{dx}=e^{-x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-e^{-x}}{e^{-y}} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \frac{dy}{dx}=-\left(e^{y-x}\right)$$

3. $xe^{xy}=y+\sin^2 x$ ಆದಾಗ, $x=0$ ಯಲ್ಲಿ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{xy}\right)=\frac{d}{dx}\left(y+\sin^2 x\right)$$

$$1e^{xy}+x\left[e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx}+y.1\right)\right]=\frac{dy}{dx}+2\sin x\cos x$$

$$e^{xy}+x^2e^{xy}\frac{dy}{dx}+xy=\frac{dy}{dx}+2\sin x\cos x$$

$x=0$ ಆದಾಗ $y=0$ ಆಗುವುದು.

($x=0$ ವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ)

$$e^0+0+0=\frac{dy}{dx}+0 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=1$$

4. $\sin(x+y)=\log(x+y)$

$$\frac{d}{dx}\sin(x+y)=\frac{d}{dx}\log(x+y)$$

$$\therefore \quad \cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{(x+y)}\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\left\{\cos(x+y)-\frac{1}{x+y}\right\}=\frac{1}{(x+y)}-\cos(x+y)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\{1-(x+y)\cos(x+y)\}}{\{(x+y)\cos(x+y)-1\}} \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{dx}=-1$$

5. $x^m y^n = a^{m+n}$ ಆದಾಗ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{my}{nx}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{d}{dx}\left(x^m y^n\right) = \frac{d}{dx}\left(a^{m+n}\right)$$

$$x^m n y^{n-1}\frac{dy}{dx} + y^n \cdot m x^{m-1} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-my^n x^{m-1}}{ny^{n-1}x^m}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{my}{nx}$$

6. $\sec\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right) = a$ ಆದಾಗ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\therefore \quad \frac{x+y}{x-y} = \sec^{-1} a$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x+y}{x-y}\right\} = \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} a\right)$$

$$\frac{(x-y)\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right) - (x+y)\left(1-\dfrac{dy}{dx}\right)}{(x-y)^2} = 0$$

$$\therefore \quad x - y + (x-y)\frac{dy}{dx} - (x+y) + (x+y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}(x - y + x + y) = 2y \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

7. $\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ ಆದಾಗ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$x = \sin\alpha$, $\quad y = \sin\beta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ.

$\alpha = \sin^{-1} x, \quad \beta = \sin^{-1} y$

$\sqrt{1-\sin^2\alpha} - \sqrt{1-\sin^2\beta} = a(\sin\alpha - \sin\beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = a(\sin\alpha - \sin\beta)$

$$-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = a\left(2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow -\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = a\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$\therefore \quad -\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = a$ ಅಥವಾ $\frac{\alpha+\beta}{2} = -\tan^{-1} a$

$$\alpha+\beta = -2\tan^{-1} a$$

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = -2\tan^{-1} a$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) + \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} y\right) = -2\tan^{-1} a$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

8. $\sin y = x\cos(a+y)$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$x = \frac{\sin y}{\cos(a+y)}$$

y ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sin y}{\cos(a+y)}\right)$$

$$= \frac{\cos(a+y)\frac{d}{dy}\sin y - \sin y\frac{d}{dy}\cos(a+y)}{\cos^2(a+y)}$$

$$= \frac{\cos(a+y)\cos y - \sin y[-\sin(a+y)]}{\cos^2(a+y)}$$

$$= \frac{\cos(a+y-y)}{\cos^2(a+y)}$$

$[\because \cos A\cos B + \sin A\sin B = \cos(A-B)]$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\cos a}{\cos^2(a+y)}$$

ಅಥವಾ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$$

9. $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ ಮತ್ತು $y \neq x$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$

ಎರಡೂಕಡೆ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$x^2(1+y) = y^2(1+x)$

$x^2 + x^2y - y^2 - y^2x = 0$

$(x^2 - y^2) + xy(x-y) = 0$

$(x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0$

$(x-y)(x+y+xy) = 0$

$x \neq y \quad \therefore \quad x + y + xy = 0$

$y(1+x) = -x$

ಅಥವಾ $$y = \frac{-x}{(1+x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)(-1) + x(1)}{(1+x)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

10. $y=\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\cdots\cdots\infty}}}$ ಆದಾಗ

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(2y-1)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y=\sqrt{\log x+y}$$

$$\therefore \quad y^2=\log x+y$$

$$y^2-y=\log x$$

$$2y\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}(2y-1)=\frac{1}{x}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(2y-1)}$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.6

I ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $x^3+y^3=3axy$
2. $x^2+y^2=x^2y^2$
3. $x\sin y+y\sin x=0$
4. $(\log x)^{\sin x}$
5. $(\cot^{-1}x)^{1/x}$
6. $\cos x^y$
7. $(\sin y)^x=(\cos x)^y$
8. $x^y=e^{x-y}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
9. $x^{\tan x}+(\sin x)^{\cos x}$
10. $b\cos mx+a\sin ny=0$
11. $\sin\sqrt{xy}=\sin(x+y)-(x+y)$

12. $\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$

13. $x=y\sqrt{1-y^2}$

14. $x^2\log y+y^2\log x=2$

15. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, ಆದರೆ $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ ನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

II

1. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=a, x\neq y$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $\sin^{-1}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=a$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{y^2-1}=a\left[1+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$ ಆದರೆ

$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sqrt{y^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $x\cos y=\sin x$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos y[\cos y-\cos x]}{\sin x\sin y}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\cdots\infty}}}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $x\sin(a+y)=\sin y$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $x^y=a^x$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{x\log a-y}{x\log x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $y=x^{x^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x(1-y\log x)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\infty}}}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y-1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $y=(\sin x)^{\sin x^{\sin x^{\cdots\infty}}}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\cot x}{1-y\log\sin x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $(a-b\cos y)(a+b\cos x)=a^2-b^2$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $\sin(x+y)+\sin(x-y)=1$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}=\cot x\cot y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10.11 ಲಾಗರತಮೀಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ x ಅಥವಾ y ಚರವು ಘಾತವಾಗಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡಾಗ ಆ ಉತ್ಪನ್ನದ ಲಾಗರಿತಮ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಂತರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಲಾಗರಿತಮೀಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$y=u^v$, u ಮತ್ತು v ಯಾವುದೇ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $\log y=\log u^v$

ಅಥವಾ, $\log y=v\log u$

$$\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{d}{dx}(v\log u)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=v\frac{1}{u}\frac{du}{dx}+\log u\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log u\frac{dv}{dx}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u^v\left[\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log u\frac{dv}{dx}\right]$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left[\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log u\frac{dv}{dx}\right]}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = x^{\sin x}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಾಗರಿತಮ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\log y = \log x^{\sin x}$$

$$\log y = \sin x \log x \quad [\because \ \log x^m = m \log x]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(\sin x . \log x)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x\right]$$

ಅಥವಾ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ

$y = x^{\sin x}$ ಇದು $y = u^v$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿದೆ.

$$\therefore \quad u = x, \quad v = \sin x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(u^v\right) = u^v\left[\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log u\frac{dv}{dx}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right) = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{d}{dx}(x) + \log x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x\right]$$

2. $y = x^{\sin^{-1} x}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = u^v, \quad u = x, \quad v = \sin^{-1} x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u^v \left[\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log u \frac{dv}{dx} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin^{-1} x} \left[\frac{\sin^{-1} x}{x} \frac{d}{dx}(x) + \log x \cdot \frac{d}{dx} \sin^{-1} x \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin^{-1} x} \left[\frac{\sin^{-1} x}{x} + \log x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]$$

3. $y = x^{x^{\sec x}}$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\log y = x^{\sec x} \cdot \log x$$

$$\therefore \quad \log(\log y) = \log(x^{\sec x} \cdot \log x)$$

$$= \log x^{\sec x} + \log(\log x)$$

$$[\because \ \log mn = \log m + \log n]$$

$$\log(\log y) = \sec x \log x + \log(\log x)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\log y} \cdot \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \sec x \tan x + \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y \log y \left[\frac{\sec x}{x} + \log x \cdot \sec x \tan x + \frac{1}{x \log x} \right]$$

4. $x^m y^n = (x+y)^{m+n}$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\log(x^m y^n) = \log((x+y)^{m+n})$$

$$\therefore \quad \log x^m + \log y^n = (m+n)\log(x+y)$$

$$m \log x + n \log y = (m+n)\log(x+y)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(m \log x) + \frac{d}{dx}(n \log y) = (m+n)\frac{d}{dx}\log(x+y)$$

$$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}\frac{dy}{dx}=(m+n)\left[\frac{1}{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

$$\frac{n}{y}\frac{dy}{dx}-\frac{m+n}{x+y}\frac{dy}{dx}=\frac{m+n}{x+y}-\frac{m}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{n}{y}-\frac{m+n}{x+y}\right)=\frac{(m+n)x-m(x+y)}{(x+y)x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{n(x+y)-y(m+n)}{y(x+y)}\right)=\frac{mx+nx-mx-my}{(x+y)x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}\left(\frac{nx+ny-my-ny}{y}\right)=\frac{(nx-my)}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y(nx-my)}{x(nx-my)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

5. $x^y=e^{x-y}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\log x}{(1+\log x)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಲಾಗರಿತಮನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\therefore \quad \log x^y=\log e^{x-y}$$

$$\therefore \quad y\log x=(x-y)\log^e$$

$$y(\log x+1)=x \qquad [\because \ \log_e e=1]$$

$$y=\frac{x}{(1+\log x)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{(1+\log x)(1)-x(1/x)}{(1+\log x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

6. $y=x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = x^{y}$$

$$\log y = \log x^{y}$$

$$\log y = y \log x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y} - \log x\right) = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1 - y\log x)}$$

7. $y = x^{\sin x} + (\sin x)^{\tan x}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\sin x}) + \frac{d}{dx}(\sin x)^{\tan x} \qquad ...(1)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{\sin x}) = ?$$

$$\frac{d}{dx}(u^{v}) = u^{v}\left[\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log u \frac{dv}{dx}\right], \quad u = x, \quad v = \sin x$$

$$\frac{d}{dx}(x^{\sin x}) = x^{x\sin x}\left[\frac{\sin x}{x}\frac{d}{dx}(x) + \log x \frac{d}{dx}(\sin x)\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \log x \cos x\right] \qquad ...(2)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)^{\tan x} = (\sin x)^{\tan x}\left[\frac{\tan x}{\sin x}\frac{d}{dx}\sin x + \log \sin x \frac{d}{dx}\tan x\right]$$

$$= (\sin x)^{\tan x}\left[\frac{\tan x}{\sin x}\cdot \cos x + \log \sin x \cdot \sec^2 x\right]$$

$$= (\sin x)^{\tan x}\left[1 + \log \sin x \cdot \sec^2 x\right] \qquad ...(3)$$

(2) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x\right] + (\sin x)^{\tan x}\left[1 + \log \sin x \cdot \sec^2 x\right]$$

8. $x^y = y^x$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \frac{y(y - x\log y)}{x(x - y\log x)}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಲಾಗರಿತಮನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\log x^y = \log y^x$$

$$y\log x = x\log y$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(y\log x) = \frac{d}{dx}(x\log y)$$

$$y\frac{1}{x} + \log x\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\log x\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \log y - \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\log x - \frac{x}{y}\right) = \frac{(x\log y - y)}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x\log y - y)/x}{(y\log x - x)/y}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)} \text{ ಅಥವಾ } \frac{dy}{dx} = \frac{y(y - x\log y)}{x(x - y\log x)}$$

9. $(xe)^y = e^x$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\therefore \quad x^y . e^y = e^x \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x^y = e^{x-y}$$

$$\log x^y = \log e^{x-y}$$

$$\therefore \quad y\log x = x - y$$

$$y\log x + y = x$$

$$y(1 + \log x) = x \Rightarrow y = \frac{x}{(1 + \log x)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)(1) - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

10. $x^y = a^x$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \frac{x\log a - y}{x\log x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಲಾಗರಿತಮನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\log x^y = \log a^x$$

$$\therefore \quad y\log x = x\log a$$

$$\frac{d}{dx}(y\log x) = \frac{d}{dx}(x\log a)$$

$$y\cdot\frac{1}{x} + \log x\frac{dy}{dx} = \log a(1)$$

$$\therefore \quad \log x\frac{dy}{dx} = \log a - \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x\log a - y)}{x\log x}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.7

I ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. x^{x^x}
2. $(\log x)^{\sin x}$
3. $(\sin x)^{\log x} + (\log x)^{\tan 3x}$
4. $x^5 y^2 = (x+y)^7$
5. $x^x = y^y$
6. $x^{1/x} + \frac{1}{x^x}$

7. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}$

8. $(\sinh x)^{\tanh x}$

9. $x^{\sin x}+(\sin x)^x$

10. $(\cosh 2x)^{\sin 3x}$

11. $x^{\tan x}-(\sinh x)^{\log x}$

12. $(x+1)(x+2)^{1/2}(x+3)^{1/3}$

II

1. $x^y=e^{x-y}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\log x}{(1+\log x)^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2. $x^x=y^y$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\log x}{1+\log y}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3. $x^{\sin y}=(\sin x)^y$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy\cot x-\sin y}{x(\cos y\log x-\log\sin x)}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4. $y=\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}=ny\left[1+\log\dfrac{x}{n}\right]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10.12 ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ

ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, x ಮತ್ತು y ಚರಗಳೆರಡೂ ಮತ್ತೊಂದು ಮೂರನೆಯ ಚರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಮೂರನೆಯ ಚರವನ್ನು ಪ್ರಮಿತಿ ಅಥವಾ ಪ್ರಚರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೀತಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಪ್ರಮೀತಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು.

$x=f(t)$ ಮತ್ತು $y=g(t)$ ಈ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಲ್ಲಿ 't' ಚರವು ಪ್ರಮಿತಿ ಆಗಿರಲಿ. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}f(t)$ ಮತ್ತು $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}g(t)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$ ಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x=a\cos t \quad y=b\sin t$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\left.\begin{aligned} y&=b\sin t\\ \therefore\ \frac{dy}{dt}&=b\cos t\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x&=a\cos t\\ \therefore\ \frac{dx}{dt}&=-a\sin t\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{b}{a}\right)\cot t$$

2. $x=at^2,\ y=2at$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\left.\begin{aligned} y&=2at\\ \therefore\ \frac{dy}{dt}&=2a\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x&=at^2\\ \frac{dx}{dt}&=2at\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2a}{2at}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$$

3. $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\left.\begin{aligned} y&=a(1-\cos\theta)\\ \therefore\ \frac{dy}{dx}&=a(\sin\theta)\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x&=a(\theta-\sin\theta)\\ \therefore\ \frac{dx}{d\theta}&=a(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin x\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$$

4. $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = a\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = a\cos t \qquad \text{...(1)}$$

$$x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\cdot\sec^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right)$$

$$= a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) \qquad [\because \ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}]$$

$$= a\frac{\left(-\sin^2 t + 1\right)}{\sin t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(\cos^2 t)}{\sin t} \qquad ...(2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{(a\cos^2 t/\sin t)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan t$$

5. $x = \log\sin\theta$, $y = \log\cos\theta$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = \log\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\cos\theta}(-\sin\theta)$$

$$= -\tan\theta$$

$$x = \log\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\cos\theta$$

$$= \cot\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\tan\theta}{\cot\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan^2\theta$$

6. $x = e^{\sin 3t}$, $y = e^{\cos 3t}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = e^{\cos 3t}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos 3t}(-\sin 3t \cdot 3)$$

$$x = e^{\sin 3t}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = e^{\sin 3t}(\cos 3t \cdot 3)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin 3t \cdot e^{\cos 3t}}{3\cos 3t \cdot e^{\sin 3t}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\tan 3t \cdot e^{(\cos 3t - \sin 3t)}$$

7. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$. $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a[\cos\theta - (\cos\theta + \theta(-\sin\theta))]$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\theta\sin\theta$$

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a[-\sin\theta + \sin\theta + \theta\cos\theta]$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

8. $x = 3\cos t - 2\cos^3 t$, $y = 3\sin t - 2\sin^3 t$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \cot t$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y = 3\sin t - 2\sin^3 t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 6\sin^2 t\cos t = 3\cos t(1-2\sin^2 t)$$

$$x = 3\cos t - 2\cos^3 t$$

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t - 6\cos^2 t(-\sin t)$$

$$= -3\sin t + 6\sin t\cos^2 t = 3\sin t(2\cos^2 t - 1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= \frac{3\cos t(1-2\sin^2 t)}{3\sin t(2\cos^2 t-1)}$$

$$= \cot t\frac{\cos 2t}{\cos 2t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cot t$$

9. $x = \theta\sin 2\theta$, $y = \theta\cos 2\theta$ ಆದರೆ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx} = \frac{-\pi}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y = \theta\cos 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos 2\theta + \theta(-2\sin 2\theta)$$

$$x = \theta\sin 2\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \sin 2\theta + \theta(2\cos 2\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{(\cos 2\theta - 2\theta\sin 2\theta)}{(\sin 2\theta + 2\theta\cos 2\theta)}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{0 - \frac{\pi}{2}(1)}{1 + \frac{\pi}{2}(0)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{2}$ ಆಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.8

I ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
2. $x = \sin^{-1}(3t - 4t^3), \quad y = \cos^{-1}(1 - 2t^2)$
3. $x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$
4. $x = 3\sin 2\theta + 2\sin 3\theta, \quad y = 2\cos 3\theta - 3\cos 2\theta$
5. $x = a\log\sec\theta, \quad y = a(\tan\theta - 1)$
6. $x = e^t(\cos t + \sin t), \quad y = e^t(\cos t - \sin t)$
7. $x = a\cos^4\theta, \quad y = a\sin^4\theta$
8. $x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \quad y = \cos^{-1}(4t^3 - 3t)$
9. $x = a\left(t - \frac{1}{t}\right), \quad y = a\left(t + \frac{1}{t}\right)$
10. $y = e^{\sin^{-1} t}, \quad x = e^{-\cos^{-1} t}$
11. $y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2}, \quad x = \tan^{-1} t$
12. $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta, \quad y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$

II 1. $x = a\cos^3\theta$, $y = b\sin^3\theta$ ಆದರೆ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x = \cos\theta(1+\cos\theta)$, $y = \sin\theta(1+\cos\theta)$ ಆದರೆ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $x = e^t \sin t$, $y = e^{-t}\cos t$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = -e^{2t}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10.13 ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

$y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ಮತ್ತು $z = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ ಆಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈಗ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy/dx}{dz/dx} \qquad ...(1)$$

ಮೊದಲಿಗೆ, $$y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

ಇದರಲ್ಲಿ $x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $\theta = \tan^{-1} x$ ಆಗುವುದು.

$$y = \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$y = \sin^{-1}[2\sin\theta\cos\theta] \quad = \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$y = 2\theta = 2\tan^{-1} x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{(1+x^2)} \qquad \ldots(2)$$

$$z = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}\right)$$

i.e., $$z = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta} - 1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2 \theta/2}{2\sin \theta/2 \cos \theta/2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x \qquad [\because \ \theta = \tan^{-1} x]$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)} \qquad \ldots(3)$$

(2) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{2(1+x^2)}} \qquad \therefore \ \frac{dy}{dz} = 4$$ ಆಗುವುದು.

2. $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sqrt{1-x^2}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

$y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ ಮತ್ತು $z=\sqrt{1-x^2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ನಾವು $\frac{dy}{dz}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. $\frac{dy}{dz}=\frac{dy/dx}{dz/dx}$ ...(1)

ಈಗ, $y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$x=\cos\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $\theta=\cos^{-1}x$ ಎಂದು ಆಗುವುದು.

$$y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta-1}\right)$$

$$=\sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$$=\sec^{-1}(\sec\theta) \quad =2\theta$$

$$y=2\cos^{-1}x$$

x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=2\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad ...(2)$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}\cos^{-1}x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

ಹಾಗೆಯೇ $z=\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ...(3)$$

$$\left[\because \frac{d}{dz}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\right]$$

(1)ರಲ್ಲಿ (2) ಮತ್ತು (3) ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $\frac{dy}{dz}=\frac{-2/\sqrt{1-x^2}}{-x/\sqrt{1-x^2}}$

ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dz}=\frac{2}{x}$

3. $e^{\tan x}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

$y=e^{\tan x}$, $z=\sin x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\therefore \frac{dy}{dz}=\frac{dy/dx}{dz/dx} \quad ...(1)$$

ಈಗ $y=e^{\tan x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=e^{\tan x}\sec^2 x \quad ...(2)$$

$z=\sin x$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=\cos x \quad ...(3)$$

(2) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dz}=\frac{e^{\tan x}\sec^2 x}{\cos x}$$

ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dz}=e^{\tan x}\sec^3 x$

4. $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

$y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$, $z = \sin^{-1}\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)}$ ಆಗಿರಲಿ

$$\therefore \quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy/dx}{dz/dx} \qquad ...(1)$$

ಈಗ $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

ಇದರಲ್ಲಿ $x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $\therefore \quad \theta = \tan^{-1} x$

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$$

i.e. $y = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$

ಅಥವಾ $y = 2\tan^{-1} x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{(1+x^2)} \qquad ...(2)$$

ಹಾಗೆಯೇ $z = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

i.e. $z = \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$$= \sin^{-1}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \sin^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$= \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\theta \qquad = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} x$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = -2\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \qquad ...(3)$$

(2) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2/1+x^2}{-2/1+x^2} = -1$$ ಆಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.9

1. $\log \operatorname{sech} x$ ನ್ನು $\cosh x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.
2. $\tan^{-1} x$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\log \cot^{-1} x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.
3. $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.
4. $\cos^{-1}(2x^2-1)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin^{-1} x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.
5. $2\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.
6. $(\sin x)^{\tan x}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $(\tan x)^{\log x}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.
7. $e^{\sqrt{\sin x}}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin^3 x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.
8. $\tan^{-1}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin^{-1}(3x-4x^3)$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ. (ಸಲಹೆ: ಮೊದಲನೇ ನಿಷ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $a = \tan\alpha$, $x = \tan\theta$ ಹಾಗೂ ಎರಡನೇ ನಿಷ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $x = \sin\phi$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).
9. $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sqrt{1-x^2}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.
10. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

10.14 ಅನುಕ್ರಮ ಅನುಕಲನ

$y = f(x)$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ $\frac{dy}{dx}$ ಎನ್ನುವುದು x ನ ಇನ್ನೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಸಲ $\frac{dy}{dx}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ 'ಎರಡನೆಯ ಅವಕಲಸಹಾಂಕ' ಅಥವಾ 'ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದೇರೀತಿ ನಾವು ಪುನಃ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸುತ್ತಲಿದ್ದರೆ ನಮಗೆ ಮೂರನೆಯ, ನಾಲ್ಕನೆಯ . . . ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ ದೊರೆಯುವುದು. ಇವುಗಳನ್ನು **ಅನುಕ್ರಮ ಅನುಕಲನ** (successive differentiation) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಅಥವಾ y_2, y'', D^2 ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ಎಂದರ್ಥ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \sin^2 x$ ಆದರೆ y_2 ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = \sin^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x \quad = \sin 2x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos 2x$$

2. $f(x) = 3\cos x + 4\sin x$ ಆದಾಗ $f(0)$, $f'(\pi)$ ಮತ್ತು $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$f(x) = 3\cos x + 4\sin x$$

$$\therefore \quad f(0) = 3\cos(0) + 4\sin(0) = 3$$

ಪುನಃ $\quad f(x) = 3\cos x + 4\sin x$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} f(x) = -3\sin x + 4\cos x$$

ಅಂದರೆ $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x$ ...(1)

ಹಾಗೆಯೇ $f''(x) = -3\cos x - 4\sin x$ ...(2)

ಈಗ $x = \pi$ ಎಂದು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$f'(\pi) = -3\sin(\pi) + 4\cos(\pi)$$

$$= -3(0) + 4(-1) = -4$$

ಹಾಗೆಯೇ $x = \frac{\pi}{2}$ ಎಂದು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\cos\frac{\pi}{2} - 4\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= -3(0) - 4(1) = -4$$

3. $x^2 + xy + y^2 = a^2$ ಆದಾಗ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6a^2}{(x+2y)^3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ $x^2 + xy + y^2 = a^2$

$$\therefore \quad 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

i.e., $\frac{dy}{dx}(x+2y) = -(2x+y)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+y)}{(x+2y)}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{(x+2y)\left(2+\frac{dy}{dx}\right) - (2x+y)\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{2(x+2y)+(x+2y)\dfrac{dy}{dx}-(2x+y)\left\{1-2\dfrac{(2x+y)}{(x+2y)}\right\}}{(x+2y)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{2x+4y-2x-y-(2x+y)\dfrac{(x+2y-4x-2y)}{(x+2y)}}{(x+2y)^2}\right]$$

$$\left[\because (x+2y)\frac{dy}{dx} = -(2x+y)\right]$$

$$= -\left[\frac{3y(x+2y)-(2x+y)(-3x)}{(x+2y)^3}\right]$$

$$= -\left[\frac{3xy+6y^2+6x^2+3xy}{(x+2y)^3}\right]$$

$$= -\left[\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}\right]$$

ಅಂದರೆ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6a^2}{(x+2y)^3}$ $[\because x^2+xy+y^2=a^2]$

4. $y = \sin^{-1} x$ ಆದರೆ $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ $y = \sin^{-1} x$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ i.e., $\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx} = 1$

$\therefore$ $\dfrac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx}\right\} = \dfrac{d}{dx}(1)$

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0$$

$$\sqrt{1-x^2}\,(y_2)-\frac{xy_1}{\sqrt{1-x^2}}=0 \qquad ...(1)$$

(1)ನ್ನು $\sqrt{1-x^2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$(1-x^2)y_2-xy_1=0$$

5. $\log_e y=m\sin^{-1}x$ ಆದರೆ $(1-x^2)y_2-xy_1-m^2y=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಅಥವಾ $y=e^{m\sin^{-1}x}$ ಆದರೆ $(1-x^2)y_2-xy_1-m^2y=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ $\log_e y=m\sin^{-1}x$

$\therefore \quad y=e^{m\sin^{-1}x}$. ಇದನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(e^{m\sin^{-1}x})=e^{m\sin^{-1}x}\cdot m\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ಅಥವಾ $\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}=me^{m\sin^{-1}x}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right\}=m\frac{d}{dx}\{e^{m\sin^{-1}x}\}$$

i.e., $$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=m\cdot e^{m\sin^{-1}x}\cdot m\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ಅಥವಾ $$\sqrt{1-x^2}\,y_2-\frac{xy_1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{m^2y}{\sqrt{1-x^2}} \qquad ...(1)$$

$[\because y=e^{m\sin^{-1}x}]$

ಈಗ (1)ನ್ನು $\sqrt{1-x^2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2 y = 0 .$$

6. $y = \cos(m \tan^{-1} x)$ ಆದಾಗ

$(1+x^2)^2 y_2 + 2x(1+x^2)y_1 + m^2 y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $y = \cos(m \tan^{-1} x)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು

xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos(m \tan^{-1} x)$$

$$= -\sin(m \tan^{-1} x) \cdot \frac{d}{dx}(m \tan^{-1} x)$$

$$= -\sin(m \tan^{-1} x) \cdot m \cdot \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$\therefore \quad (1+x^2)\frac{dy}{dx} = -\sin(m \tan^{-1} x) \cdot m$$

ಹಾಗೆಯೇ $$\frac{d}{dx}\left\{(1+x^2)\frac{dy}{dx}\right\} = -m \cdot \frac{d}{dx}\{\sin(m \tan^{-1} x)\}$$

$$(1+x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(2x) = -m \cos(m \tan^{-1} x) \cdot m \cdot \frac{1}{(1+x^2)}$$

ಅಂದರೆ $$(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = -\frac{m^2}{1+x^2} y \qquad ...(1)$$

$$[\because \cos(m \tan^{-1} x) = y]$$

ಈಗ (1)ನ್ನು $(1+x)^2$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$(1+x^2)^2 y_2 + 2x(1+x^2)y_1 + m^2 y = 0$$

7. $y=(x^2+a^2)^6$ ಆದಾಗ $(x^2+a^2)y_2-10xy_1-12y=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $y=(x^2+a^2)^6$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=6(x^2+a^2)^5\cdot\frac{d}{dx}(x^2+a^2)$$

$$=6(x^2+a^2)^5(2x)=12x(x^2+a^2)^5 \qquad ...(1)$$

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12\cdot\frac{d}{dx}\{x(x^2+a^2)^5\}$$

$$=12[x\cdot 5(x^2+a^2)^4(2x)+(x^2+a^2)^5\cdot(1)]$$

$$=120x^2(x^2+a^2)^4+12(x^2+a^2)^5 \qquad ...(2)$$

ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದರಲ್ಲಿ y_2 ಮತ್ತು y_1 ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು [(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು] ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$(x^2+a^2)y_2-10xy_1-12y=$$
$$(x^2+a^2)[120x^2(x^2+a^2)^4+12(x^2+a^2)^5]$$
$$-10x[12x(x^2+a^2)^5]-12(x^2+a^2)^6$$

$$=120x^2(x^2+a^2)^5+12(x^2+a^2)^6$$
$$-120x^2(x^2+a^2)^5-12(x^2+a^2)^6=0$$

ಅಂದರೆ $\qquad (x^2+a^2)y_2-10y_1-12y=0$.

8. $y=e^{ax}\sin bx$ ಆದರೆ $y_2-2ay_1+(a^2+b^2)y=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ $y=e^{ax}\sin bx$

ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{ax}\sin bx) = e^{ax}b\cos bx + ae^{ax}\sin bx \qquad ...(1)$$

ಎರಡನೆಯ ಬಾರಿಗೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = b\{ae^{ax}\cos bx - e^{ax}b\sin bx\} + a\{ae^{ax}\sin bx + e^{ax}b\cos bx\}$$

$$= abe^{ax}\cos bx - b^2e^{ax}\sin bx + a^2e^{ax}\sin bx + abe^{ax}\cos bx$$

$$= 2abe^{ax}\cos bx - b^2e^{ax}\sin bx + a^2e^{ax}\sin bx \qquad ...(2)$$

ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿನ y_2 ಮತ್ತು y_1 ಬೆಲೆಗಳನ್ನು [(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು] ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 2abe^{ax}\cos bx - b^2e^{ax}\sin bx$$
$$+ a^2e^{ax}\sin bx - 2a(be^{ax}\cos bx + ae^{ax}\sin bx)$$
$$+ (a^2+b^2)e^{ax}\sin bx$$

i.e., $y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 2abe^{ax}\cos bx - b^2e^{ax}\sin bx$
$$+ a^2e^{ax}\sin bx - 2abe^{ax}\cos bx - 2a^2e^{ax}\sin bx$$
$$+ a^2e^{ax}\sin bx + b^2e^{ax}\sin bx$$

$$\therefore \quad y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 0.$$

9. $y = ax^{n+1} + \frac{b}{x^n}$ ಆದರೆ $x^2y_2 = n(n+1)y$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ $y = ax^{n+1} + bx^{-n}$

ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = a(n+1)x^n + b(-n)x^{-n-1}$$

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a(n+1)nx^{n-1} - bn(-n-1)x^{-n-2}$$

$$= an(n+1)x^{n-1} + bn(n+1)x^{-n-2}$$

$$\therefore \quad x^2 y_2 = x^2[n(n+1)\{ax^{n-1} + bx^{-n-2}\}]$$

$$= n(n+1)\{ax^{n-1+2} + bx^{-n-2+2}\}$$

$$= n(n+1)\{ax^{n+1} + bx^{-n}\}$$

ಅಂದರೆ $x^2 y_2 = n(n+1)y$

10. $y = x\cos(\log x) + x\log x$ ಆದರೆ $x^2 y_2 - xy_1 + 2y = x\log x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $y = x\cos(\log x) + x\log x$

ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = x\left(-\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}\right) + \cos(\log x)(1) + x\frac{1}{x} + \log x(1)$$

$$= -\sin(\log x) + \cos(\log x) + 1 + \log x \qquad ...(1)$$

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos(\log x)\frac{1}{x} - \sin(\log x)\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \qquad ...(2)$$

ಈಗ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ (1) ಮತ್ತು (2) ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\therefore \quad x^2 y_2 - xy_1 + 2y = x^2\left[-\frac{\cos(\log x)}{x} - \frac{\sin(\log x)}{x} + \frac{1}{x}\right]$$
$$- x[-\sin(\log x) + \cos(\log x) + 1 + \log x]$$
$$+ 2[x\cos(\log x) + x\log x]$$

$$= -x\cos(\log x) - x\sin(\log x) + x + x\sin(\log x)$$
$$- x\cos(\log x) - x + 2x\cos(\log x) - x\log x + 2x\log x$$

$$= x\log x$$

ಅಂದರೆ $x^2 y_2 - xy_1 + 2y = x\log x$

11. $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a^2}\operatorname{cosec}^3\theta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು θಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta \qquad ...(1)$$

ಮತ್ತು $$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta \qquad ...(2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta} \quad = \frac{-b}{a}\cot\theta$$

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a}\frac{d}{dx}(\cot\theta)$$

$$= \frac{-b}{a}\frac{d}{d\theta}(\cot\theta)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{-b}{a}(-\operatorname{cosec}^2\theta)\cdot\left(\frac{-1}{a\sin\theta}\right)$$

ಅಂದರೆ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a^2}\operatorname{cosec}^3\theta$$

12. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^4\theta/2}{4a}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ $y = a(1 - \cos\theta)$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

θಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{d\theta} = a(\sin\theta) \qquad ...(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ $x = a(\theta + \sin\theta)$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

θಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta) \qquad ...(2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \quad \text{(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ}$$

$$= \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

i.e. $$\frac{dy}{dx} = \tan\frac{\theta}{2}$$

ಇದನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{d}{d\theta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \left[\sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{1}{a(1+\cos\theta)} \qquad \left[\because \frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{\sec^2\frac{\theta}{2}}{2a\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

ಅಂದರೆ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^4\frac{\theta}{2}}{4a}$$

13. $x = \sin\theta$, $y = \sin p\theta$ ಆದರೆ $(1-x^2)y_2 - xy_1 + p^2 y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $x = \sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1} x$

ಈ ಮೇಲಿನ $\theta = \sin^{-1} x$ನ್ನು $y = \sin p\theta$ ದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ y ಚರವು x ಚರದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವುದು:

$$y = \sin(p\sin^{-1} x)$$

x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(p\sin^{-1} x)\cdot p\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$\therefore \quad \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = p\cos(p\sin^{-1} x)$$

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right\} = p\frac{d}{dx}\cos(p\sin^{-1} x)$$

ಅಂದರೆ $\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$

$$= p[-\sin(p\sin^{-1} x)].p.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ಅಂದರೆ $\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^2 y}{dx^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{p^2\sin(p\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$ ...(1)

(1)ನ್ನು $\sqrt{1-x^2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - xy_1 + p^2 y = 0 \qquad [\because y = \sin(p\sin^{-1} x)]$$

14. $y=(x+\sqrt{x^2+1})^m$ ಆದರೆ $(x^2+1)y_2+xy_1-m^2y=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$

ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx}=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\cdot\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

i.e., $$\frac{dy}{dx}=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1+1}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx}=m(x+\sqrt{1+x^2})^m$$

ಇದನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx}\right)=m\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2})^m$$

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)$$

$$=m.m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

ಅಥವಾ $$\sqrt{1+x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{dy}{dx}=\frac{m^2(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}}\quad ...(1)$$

(1)ನ್ನು $\sqrt{1+x^2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=m^2y \qquad [\because y=(x+\sqrt{1+x^2})^m]$$

ಅಥವಾ $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$

15. $y = (\cos^{-1} x)^2$ ಆದರೆ $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $y = (\cos^{-1} x)^2$

ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = 2(\cos^{-1} x).\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = -2\cos^{-1} x$$

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right\} = -2\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)$$

i.e., $\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -2\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

ಅಥವಾ $\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^2 y}{dx^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ ...(1)

(1)ನ್ನು $\sqrt{1-x^2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$(1-x^2)\dfrac{d^2 y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 2 = 0$ ಅಥವಾ $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.10

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\sin^2 x$ (ii) $\sqrt[5]{x}$ (iii) $(\log x)^3$

(iv) $\sin 8x \sin 2x$ (v) $(\sin^{-1} x)$

2. $y=\sin(\sin x)$ ಆದರೆ $y_2+\tan x y_1+y\cos^2 x=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $x^2+y^2=1$ ಆದರೆ $yy''+(y')^2+1=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $x=a\cos nt+b\sin nt$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dt^2}=-n^2x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $y=e^{m\cos^{-1}x}$ ಆದರೆ $(1-x^2)y_2-xy_1-m^2y=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $y=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $x^2+2xy+3y^2=1$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2}{(x+3y)^3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $y=(x+\sqrt{x^2+a^2})^m$ ಆದರೆ $(x^2+a^2)y_2+xy_1-m^2y=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $e^x+e^y=e^{x+y}$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{y-x}+e^{2(y-x)}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ಆದರೆ $t=\frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3a}$ ಆಗುವ್ಯದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $x=a\sin 2t(1+\cos 2t)$, $y=a\cos 2t(1-\cos 2t)$ ಆದರೆ, $t=\frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $x=a(\cos t+\log\tan\frac{t}{2})$, $y=a\sin t$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin t}{a\cos^4 t}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$, $y=\cos^{-1}(1-2x^2)$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ ಆದರೆ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $y = a\cosh(nx) + b\sinh(nx)$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ ಆದರೆ $(x^2 + a^2)y_2 + xy_1 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. $x = \sinh\theta$, $y = \sin p\theta$ ಆದರೆ $(1 + x^2)y_2 + xy_1 + p^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. $y = (\tan^{-1}x)^2$ ಆದರೆ $(1 + x^2)^2 y_2 + 2x(1 + x^2)y_1 = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. $y = (\cosh^{-1}x)^2$ ಆದರೆ $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. $y = \sin(m\cos^{-1}x)$ ಆದರೆ $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

22. $y = e^{m\tan^{-1}x}$ ಆದರೆ $(1 + x^2)^2 y_2 + 2x(1 + x^2)y_1 = m^2y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

23. $y = e^{ax}\cos bx$ ಆದರೆ $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

24. $y = x^2\cos x$ ಆದರೆ $x^2y_2 - 4xy_1 + (x^2 + 6)y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

25. $y = e^x(a\cos x + b\sin x)$ ಆದರೆ $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

26. $y = \dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ ಆದರೆ $(1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

27. $y = e^{\tan^{-1} x}$ ಆದರೆ $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

28. $y = \sin(\log x)$ ಆದರೆ $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

29. $y = e^x \log x$ ಆದರೆ $xy_2 - (2x-1)y_1 + (x-1)y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

30. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ ಆದರೆ $4(x^2-1)y_2 + 4xy_1 = y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

31. $x = \sinh t,\ y = \cosh pt$ ಆದರೆ $(1+x^2)y_2 + xy_1 - p^2 y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

32. $y = (x + \sqrt{x^2+1})^8$ ಆದರೆ $(x^2+1)y_2 + xy_1 - 64y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

33. $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ ಆದರೆ $(x^2-1)y_2 + xy_1 = m^2 y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

34. $x^2 + xy + y^2 = 0$ ಆದರೆ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

35. $x = \sin^{-1}\left[\dfrac{2t}{1+t^2}\right],\ y = \cos^{-1}\left[\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right]$ ಆದರೆ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

"ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಒಂದು ಮಹಾಸಾಗರದಂತೆ –
ಮೇಲ್ಮೈಲನಲ್ಲಿ (ತೋರಿಕೆಗೆ) ಬಹಳ ಭೀಕರ ಮತ್ತು
ಪ್ರಚಂಡವಾದ ಅಬ್ಬರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.
ಆದರೆ, ಆಳದಲ್ಲಿ ಶುದ್ಧವೂ, ಶಾಂತವೂ ಆದ
ರಶ್ಮಿಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಅನರ್ಘ ಮುತ್ತುರತ್ನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ."

– ಸ್ವಾಮಿ ರಾಮತೀರ್ಥ

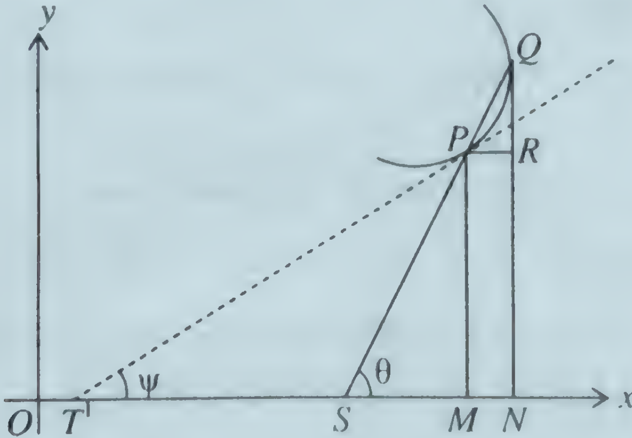
ಅಧ್ಯಾಯ 11

ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಅನ್ವಯಗಳು

11.1 ರೇಖಾಗಣಿತದ ರೀತಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಕಲನಾಂಕದ ಅರ್ಥಕಲ್ಪನೆ

ಇದುವರೆಗೆ ನಾವು ವಿವಿಧರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳ ಹಲವು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ದರಮಾಪಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ (ಇಳಿಜಾರು)ವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಹಾಗೂ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

$y = f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $P(x, y)$ ಎಂಬುದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.1),



ಚಿತ್ರ 11.1

PT ಸ್ಪರ್ಶಕವು x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ψ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಿ. ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ (ಇಳಿಜಾರು) $\tan\psi$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$y = f(x)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $P(x, y)$ ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. PQ ಜ್ಯಾವು x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ θ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಿ. PM, QN x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಮತ್ತು PR QN ಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಎಳೆಯೋಣ.

$$\therefore \quad R\hat{P}Q = \theta \text{ ಆಗುವುದು}$$

ಈಗ, $PR = MN = ON - OM \equiv (x+\delta x) - x = \delta x$

$RQ = NQ - NR = NQ - MP = (y+\delta y) - y = \delta y$

RPQ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\tan R\hat{P}Q = \frac{QR}{PR} = \frac{\delta y}{\delta x}$$

i.e. $$\tan\theta = \frac{\delta y}{\delta x}$$

Q ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವನ್ನು ($y = f(x)$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ) ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿದ್ದಂತೆಲ್ಲಾ PQ ಜ್ಯಾವು PT ಸ್ಪರ್ಶಕದಲ್ಲಿ ಲೀನವಾಗುವುದು. ಹಾಗಾಗಿ θ ಕೋನವು ψ ಆಗುವುದು.

ಅಂದರೆ $$\lim_{\theta\to\psi} \tan\theta = \lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

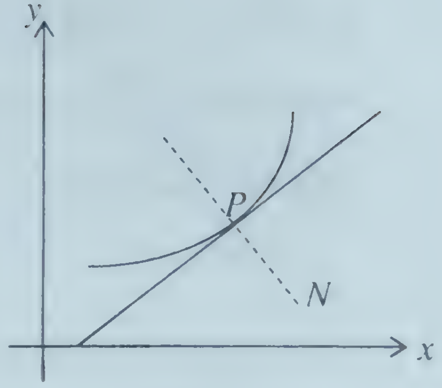
$$\therefore \quad \tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

ಅಂದರೆ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

11.2 ಸ್ಪರ್ಶಕ ಹಾಗೂ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.2). PT ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ Pಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದಾಗ PN ಲಂಬರೇಖೆಯಾಗುವುದು.

$\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು (x_1, y_1) ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವು ಸಿಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 11.2

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)}$$

i.e. $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ.

ಲಂಬರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಓಟವು (–1/ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ: $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

i.e. $$y - y_1 = \frac{-1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)}}(x - x_1)$$

$\frac{dy}{dx}$ ಎನ್ನುವುದು ನಿಷ್ಪನ್ನದ ರೇಖಾಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿನ ಅರ್ಥಕಲ್ಪನೆ.

ಸೂಚನೆ:

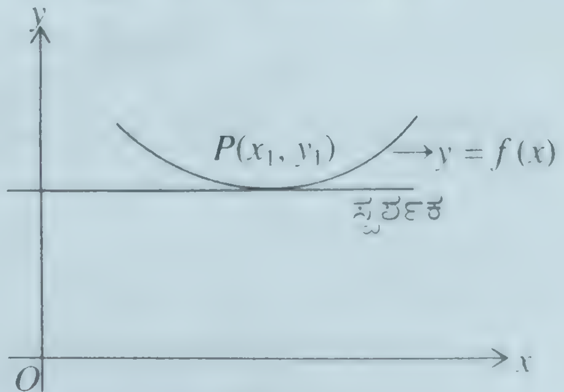
1. ಸ್ಪರ್ಶಕವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ:

$$y = y_1$$

$\because \frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ಆಗುವುದು.

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \tan\psi = 0.$

$\Rightarrow \psi = 0$ (ಚಿತ್ರ 11.3)



ಚಿತ್ರ 11.3

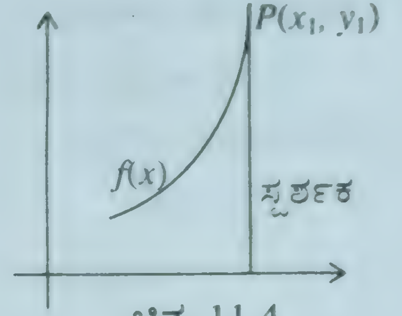
2. ಸ್ಪರ್ಶಕವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ (y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ) ಇರಬೇಕಾದರೆ, $\frac{dy}{dx} \to \infty$ ಅಥವಾ $\frac{dx}{dy} = 0$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು(ಚಿತ್ರ 11.4).

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ:

$$x = x_1$$

ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ:

$$y = y_1$$



ಚಿತ್ರ 11.4

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

I. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $xy = k$

$xy = k$ ಯನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$x\frac{dy}{dx} + y(1) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)}$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \quad m = \frac{-y_1}{x_1}$$

$\therefore \quad m = \frac{-y_1}{x_1}$ ಓಟವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $y - y_1 = m(x - x_1)$ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ

$$y - y_1 = \left(-\frac{y_1}{x_1}\right)(x - x_1)$$

$$\therefore \quad x_1 y - x_1 y_1 = -xy_1 + x_1 y_1$$

ಅಥವಾ $\quad x_1 y + xy_1 = 2x_1 y_1$

ಅಥವಾ $x_1 y_1$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ

$$\frac{y}{y_1}+\frac{x}{x_1}=2$$

$m'=\frac{-1}{m}$ ಓಟವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ, $y-y_1=m'(x-x_1)$

$$\therefore \quad (y-y_1)=\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

$$\therefore \quad yy_1-y_1^2=xx_1-x_1^2$$

ಅಥವಾ $\quad xx_1-yy_1=x_1^2-y_1^2$

2. $x^2-3axy+y^2=0$ ರೇಖೆಯ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$2x-3a\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}(2y-3ax)=3ay-2x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3ay-2x}{2y-3ax}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)}$$

$$\therefore \quad m=\left.\frac{3ay-2x}{2y-3ax}\right|_{(x_1, y_1)}=\frac{3ay_1-2x_1}{2y_1-3ax_1}$$

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ m ಓಟವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

i.e. $$(y-y_1)=\left(\frac{3ay_1-2x_1}{2y_1-3ax_1}\right)(x-x_1)$$

ಅಥವಾ $(y-y_1)(2y_1-3ax_1)=(3ay_1-2x_1)(x-x_1)$

ಅಥವಾ $2yy_1-2y_1^2-3ax_1y+3ax_1y_1$

$$=3ay_1x-3ax_1y_1-2xx_1+2x_1^2$$

ಅಥವಾ $2x_1^2+2y_1^2+3ay_1x-2xx_1+3ax_1y-2y_1y-6ax_1y_1=0$

ಅಥವಾ $(3ay_1-2x_1)x+(3ax_1-2y_1)y+(2x_1^2+2y_1^2-6ax_1y_1)=0$

3. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ (9, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

(9, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ $m=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(9,\,4)}$

$$\therefore \quad m=\left.\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right|_{(9,\,4)} \quad =-\frac{2}{3}$$

$\therefore$ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಓಟ, $m'=-\dfrac{1}{m}$. $\therefore \; m'=\dfrac{3}{2}$

(9, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m=\dfrac{-2}{3}$ ಓಟವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$\therefore \; (y-4)=\dfrac{-2}{3}(x-9)$ ಅಥವಾ $3(y-4)=-2(x-9)$

$\therefore \; 3y-12=-2x+18$ i.e. $2x+3y-30=0$

(9, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m' = \frac{3}{2}$ ಓಟವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಲಂಬರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣ $y - y_1 = m'(x - x_1)$

$$(y-4) = \frac{3}{2}(x-9) \quad \text{ಅಥವಾ} \quad 2y - 8 = 3x - 27$$

ಅಂದರೆ $3x - 2y - 19 = 0$

4. $y = \sin 2x$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ $x = \frac{\pi}{6}$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x = \frac{\pi}{6}$ ಆದಾಗ $y = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಆಗುವುದು.

$y = \sin 2x$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x .$$

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}}$

$\therefore \quad m = 2\cos 2x\big|_{x=\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1$

$\therefore$ ಲಂಬಕದ ಓಟ $m' = -\frac{1}{m}$, $m' = -1$

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ, $x = \frac{\pi}{6}$ ಬಿಂದುಪಿನಲ್ಲಿ $m = 1$ ಓಟಪಿದ್ದಾಗ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ಅಥವಾ $x - y - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಬಿಂದುಪಿನಲ್ಲಿ $m' = -1$ ಆದಾಗ

$$y - y_1 = m'(x - x_1)$$

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \quad x + y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = 0$$

5. $4x - 2y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ $y = 6x - x^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $4x - 2y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು. ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟ

$$= \frac{-(x \text{ ನ ಸಹಗುಣಾಂಕ})}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಾಂಕ}} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ = 2 ಆಗುವುದು.

ಈಗ $y = 6x - x^2$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = 6 - 2x$$

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)} = 6 - 2x_1 .$$

$\therefore \quad 6 - 2x_1 = 2$

$\therefore \quad 2x_1 = 4 \qquad \therefore \quad x_1 = 2$

$x_1 = 2$ ವನ್ನು $y = 6x - x^2$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$y_1 = 6(2) - 2^2 = 12 - 4 = 8$ ಆಗುವುದು.

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು $(x_1, y_1) \equiv (2, 8)$

(2, 8) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ $m=2$ ಆದಾಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\therefore \quad y-8=2(x-2)$ ಅಥವಾ $2x-y+4=0$

6. $x+2y=6$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ $y=3x^2-4x$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x+2y=6$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $m_1 = \frac{-1}{2}$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $x+2y=6$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ $= \frac{-1}{m_1}$ ಆಗಿರುವುದು $[\because mm_1 = -1]$.

$$\therefore \quad m = \frac{-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$$

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ $= 2$

$y=3x^2-4x$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = 6x-4$$

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)} = 6x_1 - 4$$

$\therefore \quad 6x_1 - 4 = 2$

$\therefore \quad 6x_1 = 6 \qquad \therefore \quad x_1 = 1$

$x_1 = 1$ ನ್ನು $y=3x^2-4x$ ಗೆ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$y_1 = 3(1) - 4(1)$

$y_1 = -1$

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು (1, −1) ಆಗುವುದು.

$(1, -1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m=2$ ಆಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(y+1) = 2(x-1)$$

$$\therefore \quad 2x - y - 3 = 0$$

7. $ax + hy = 0$ ಎನ್ನುವ ರೇಖೆಯು $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಹಾಗೂ $hx + by = 0$ ಎನ್ನುವ ರೇಖೆಯು ಮೇಲಿನ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸರಳರೇಖೆ $ax + hy = 0$ ಮತ್ತು $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore$ (x_1, y_1) ಮೂಲಕ $ax + hy = 0$ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad ax_1 + hy_1 = 0 \qquad ...(1)$$

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $$\frac{dy}{dx}(2hx + 2by) = -(2ax + 2hy)$$

ಅಥವಾ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax + hy)}{(hx + by)} \qquad ...(2)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \frac{-(ax_1 + hy_1)}{(hx_1 + by_1)}$$

ಆದರೆ $ax_1 + hy_1 = 0$

$$\therefore \quad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \frac{-0}{(hx_1 + by_1)} = 0$$

$\therefore$ $m = 0 \Rightarrow$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸರಳರೇಖೆ $hx+by=0$ ಮತ್ತು

ದೀರ್ಘವೃತ್ತ $ax^2+2hxy+by^2=1$

(x_2, y_2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

ಅಂದರೆ $hx+by=0$ (x_2, y_2) ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು.

$\therefore \quad hx_2+by_2=0 \qquad ...(3)$

$m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_2, y_2)} = -\frac{(ax_2+hy_2)}{(hx_2+by_2)}$ [(2)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ]

ಛೇದ $hx_2+by_2=0$ ಆದ್ದರಿಂದ $m_1 \to \infty$

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

8. $(1+x^2)y=2-x$ ವಕ್ರರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $y=0$ ಆಗುವುದು.

$\therefore \quad y=0$ ನ್ನು $(1+x^2)y=2-x$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$0=2-x$ ಅಥವಾ $x=2$ ಆಗುವುದು.

$\therefore$ (2, 0) ಎನ್ನುವುದು ವಕ್ರರೇಖೆ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು.

$(1+x^2)y=2-x$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y(2x)=-1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-(1+2xy)}{(1+x^2}$$

(2, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2, 0)} = -\left.\frac{(1+2xy)}{(1+x^2)}\right|_{(2, 0)} = \frac{-1}{5}$$

$\therefore$ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಓಟ $m'=\frac{-1}{m}$, $m'=5$ ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

(2, 0)ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ $m = -\frac{1}{5}$ ಆದಾಗ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

i.e. $y - 0 = -\frac{1}{5}(x - 2)$

ಅಥವಾ $5y = -x + 2$ i.e. $x + 5y = 2$.

(2, 0)ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ಲಂಬರೇಖೆಯ ಓಟ $m' = 5$ ಆದಾಗ, ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y - y_1 = m'(x - x_1) \Rightarrow (y - 0) = 5(x - 2)$$

i.e. $5x - y - 10 = 0$

9. $y = 3x^2 + 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ -6 ಆದಾಗ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ = -6

$\therefore$ $m = -6$ ...(1)

$\therefore$ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಓಟ $= \frac{-1}{m} = \frac{1}{6}$

$y = 3x^2 + 2$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

(x_1, y_1) ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ $= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)}$

$\therefore$ $m = 6x\big|_{(x_1, y_1)}$ i.e. $m = 6x_1$

$\therefore$ $6x_1 = -6$ ((1)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ)

ಅಂದರೆ $x_1 = -1$

$x_1 = -1$ನ್ನು $y = 3x^2 + 2$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$y_1 = +3 + 2 = 5$

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು $(x_1, y_1) \equiv (-1, 5)$

(-1, 5) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m = -6$ ಆದಾಗ, ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = -6(x + 1)$ ಅಥವಾ $6x + y + 1 = 0$

(-1, 5) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m' = \frac{1}{6}$ ಆದಾಗ, ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ,

$y - y_1 = m'(x - x_1)$

$y - 5 = \frac{1}{6}(x + 1)$ ಅಥವಾ $x - 6y + 31 = 0$

10. $x = 1$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y = x^2 - 5x + 6$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ, y-ಅಕ್ಷವನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ AOB ತ್ರಿಕೋಣದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $\frac{25}{6}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ (O–ಮೂಲಬಿಂದು: ಚಿತ್ರ 11.5).

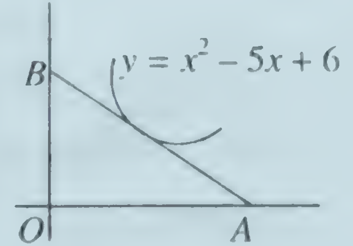
$x = 1$ನ್ನು $y = x^2 - 5x + 6$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$y = 1 - 5 + 6 = 2$

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು (1, 2) ಆಗುವುದು.

$y = x^2 - 5x + 6$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$\frac{dy}{dx} = 2x - 5$



ಚಿತ್ರ 11.5

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ (1, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\ 2)}$

$\therefore \quad m = (2x - 5)\big|_{(1,\ 2)} = 2 - 5 = -3$

(1, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ -3 ಆಗಿದ್ದಾಗ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ

$y - y_1 = m(x - x_1)$

ಅಂದರೆ $(y-2) = -3(x-1)$ ಅಥವಾ $3x + y - 5 = 0$

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $3x + y - 5 = 0$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು A ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $y = 0$ ಆಗುವುದು

$\therefore\ 3x + 0 - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$\therefore$ A ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ ಆಗುವುದು.

$\therefore\ OA = \frac{5}{3}$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ y-ಅಕ್ಷವನ್ನು Bನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. y-ಅಕ್ಷದಮೇಲೆ $x = 0$ ಆಗುವುದು

$\therefore\ 3(0) + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

Bನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(0, 5)$ ಆಗುವುದು. $\therefore\ OB = +5$

ತ್ರಿಕೋಣ AOB ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ$= \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 5$

$= \frac{25}{6}$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳು

11. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಭಾಗವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದು 'a'ಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. [ಸೂಚನೆ: $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ ಎನ್ನುವುದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ.]

$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$

$\therefore\ \frac{dx}{d\theta} = -3a\sin\theta\cos^2\theta, \ \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\sin\theta\cos^2\theta}$$

i.e. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟವು $m = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$ ಆಗುವುದು.

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$ ವಿನಲ್ಲಿ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\therefore \quad \left(y - a\sin^3\theta\right) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}(x - a\cos^3\theta)$$

ಅಥವಾ $$x\sin\theta + y\cos\theta = a\cos^3\theta\sin\theta + a\sin^3\theta\cos\theta$$

$$= a\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

i.e. $$x\sin\theta + y\cos\theta = a\cos\theta\sin\theta$$

$a\cos\theta\sin\theta$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{x}{a\cos\theta} + \frac{y}{a\sin\theta} = 1$$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ $OA = a\cos\theta$ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ $OB = a\sin\theta$ ಆಗುವುದು.

ಅದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಭಾಗ AB ಪಡೆಯಲು

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \quad \Rightarrow AB^2 = a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta$$

$$\therefore AB^2 = a^2 \ \Rightarrow AB = a$$, ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ

12. $y = 5x^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವು (2, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋದಾಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = 0$ ಮತ್ತು $40x - y - 80 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $y = 5x^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯುನ್ನು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\therefore \quad y_1 = 5x_1^2 \qquad \text{...(1)}$$

$y = 5x^2$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = 10x$$

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)} = 10x_1$

$\therefore$ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\therefore \quad y - y_1 = 10x_1(x - x_1) \qquad ...(2)$$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ (2)ಯು (2, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $x = 2,\ y = 0$ ವನ್ನು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$0 - y_1 = 10x_1(2 - x_1) \Rightarrow -y_1 = 20x_1 - 10x_1^2$$

ಆದರೆ $y_1 = 5x_1^2$. $\therefore$ $-5x_1^2 = 20x_1 - 10x_1^2$

$$\therefore \quad 5x_1^2 - 20x_1 = 0 \qquad \Rightarrow x_1(5x_1 - 20) = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 0, \quad x_1 = 4.$$

$x_1 = 0$ ವನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $y_1 = 0$ ಮತ್ತು

$x_1 = 4$ ವನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $y_1 = 80$ ಆಗುವುದು.

ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳು (0, 0) ಮತ್ತು (4, 80) ಆಗುವುದು.

$x_1 = 0,\ y_1 = 0$ ವನ್ನು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $y = 0$ ಮತ್ತು

$x_1 = 4,\ y_1 = 80$ ವನ್ನು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $y - 80 - = 10(4)(x - 4)$

$$\Rightarrow 40x - y - 80 = 0$$

13. $y^3 = x^2(2a - x)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y^3 = x^2(2a - x) \qquad ...(1)$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 4ax - 3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4ax - 3x^2}{3y^2}$$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದರೆ, $\frac{dy}{dx} = 0$ ಆಗಬೇಕು.

$$\therefore \frac{4ax - 3x^2}{3y^2} = 0$$

$$\therefore x(4a - 3x) = 0$$

$$\therefore x = 0, \quad x = \frac{4a}{3}$$

$x = 0$ ವನ್ನು $y^3 = x^2(2a - x)$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$y^3 = 0 \qquad \therefore y = 0$$

(0, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$x = \frac{4a}{3}$ ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $y^3 = \frac{16a^2}{9}\left(2a - \frac{4a}{3}\right)$

ಅಥವಾ $y^3 = \frac{16a^2}{9}\left(\frac{2a}{3}\right)$

$$\therefore \qquad y = \frac{2(4^{1/3})a}{3}$$

$\therefore \left(\frac{4a}{3}, \frac{2(4^{1/3})a}{3}\right)$ ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ

ಸ್ಪರ್ಶಕವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸ್ಪರ್ಶಕವು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದರೆ $\frac{dy}{dx} \to \infty$ ಆಗಬೇಕು.

$$\therefore \frac{4ax - 3x^2}{3y^2} \to \infty \Rightarrow 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$y=0$ ವನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$x^2(2a-x)=0 \Rightarrow x^2=0,\ x=2a.$$

$\therefore$ $(2a, 0)$ ವಿನಲ್ಲಿ

ಸ್ಪರ್ಶಕವು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. ಕೆಳಗಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $3x^2-xy+2y^2=31$ $(1, 4)$ರಲ್ಲಿ

   (ii) $y=x^3+1$ $(1, 2)$ರಲ್ಲಿ

   (iii) $2y=3x+2$ $(2, 4)$ರಲ್ಲಿ

   (iv) $y^2+4y+1=x(x+3)$ $(-2, -3)$ರಲ್ಲಿ

   (v) $xy(x+y)=6$ $(-3, 1)$ ರಲ್ಲಿ

   (vi) $xy^2=16$ $y=-2$ ರಲ್ಲಿ

   (vii) $x=\sin\theta,\ y=\cos 2\theta$ $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ ರಲ್ಲಿ

   (viii) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ ದಲ್ಲಿ

2. $y=x^3-3x^2+7$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ?

3. $y^2=5x-1$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ $(1, -2)$ನಲ್ಲಿನ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $ax-5y+b=0$ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ a ಮತ್ತು bಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. (2, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y^2=ax^3+b$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು $y=4x-5$ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ a ಮತ್ತು bಗಳ ಬೆಲೆ ಏನು?

5. $xy^2 = 16$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಲಂಬರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದು (0. 0)ವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗದರೆ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $p = x\cos\theta + y\sin\theta$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ $p^n = (a\cos\theta)^n + (b\sin\theta)^n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $3x - y + 7 = 0$ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ $y = x^2 - 3x + 5$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $y = \frac{x}{x+1}$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $x - 4y + 13 = 0$ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $2y = x^3 - x^2 + x - 4$ ವಕ್ರರೇಖೆಯು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಹಾಗೂ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $y = 3x^2 + 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವು -6 ಆದರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಹಾಗೂ ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $y^2 = 5x - 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಓಟವು $-\frac{4}{5}$ ಆದರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಹಾಗೂ ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

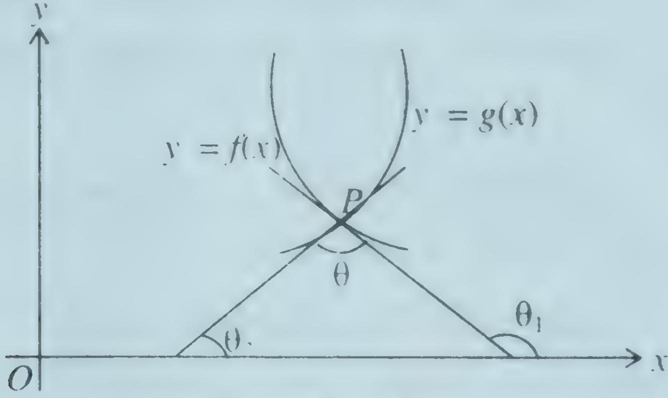
12. $x = 1$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y = 5 - 2x^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ, y-ಅಕ್ಷವನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. AOB ತ್ರಿಕೋಣದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (O ಬಿಂದುವು ಮೂಲಬಿಂದು).

13. $y = be^{-x/a}$ ವಕ್ರರೇಖೆಯು y–ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದಾಗ, y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11.3 ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ

ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು ಸುಲಭ ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ. ಆದರೆ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನೇ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

$y = f(x)$ ಮತ್ತು $y = g(x)$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.6). P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಇವು x-ಅಕ್ಷದ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ θ_2 ಮತ್ತು θ_1 ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 11.6

$y = f(x)$ ನ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ, $\quad m_1 = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)} = \tan\theta_1$

$y = g(x)$ ನ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ, $\quad m_2 = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)} = \tan\theta_2$

ಚಿತ್ರ 11.6 ರಿಂದ $\theta_2 + \theta = \theta_1$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

θ ವು ಲಘು (ಎಕ್ಯೂಟ್) ಕೋನವಾಗಿರಬೇಕಾದಲ್ಲಿ $\tan\theta$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

ಸೂಚನೆ:

1. $m_1 = m_2$ ಆದರೆ $\tan\theta = 0$ ಆಗುವುದು ಅಂದರೆ $\theta = 0$ ಆಗುವುದು. $P(x_1, y_1)$ ನಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಸೇರುತ್ತದೆ. ಆಗ ನಮಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ (ಕಾಮನ್ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

2. $m_1 m_2 = -1$ ಆದರೆ $\tan \to \infty$ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ $\theta = 90^0$ ಆಗುವುದು. $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಲಂಬಾತ್ಮಕ (ಆರ್ಥೋಗನಲ್) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y(x^2+1) = x+3$ ಮತ್ತು $y(x-1) = x^2 - 7x + 11$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು $P(2, 1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y(x^2+1) = x+3 \qquad ...(1)$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $y(2x) + (x^2+1)\frac{dy}{dx} = 1$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(1-2xy)}{(x^2+1)}$$

$$m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2, 1)} = \frac{1-2(2)(1)}{2^2+1} = \frac{-3}{5}$$

$$y(x-1) = x^2 - 7x + 11 \qquad ...(2)$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $y(1)+(x-1)\dfrac{dy}{dx}=2x-7$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x-7-y}{(x-1)}$$

$$m_2=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)}=\frac{2(2)-7-1}{(2-1)}=-4$$

(1) ಮತ್ತು (2)ರ ನಡುವಿನ ಲಘು ಕೋನ $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

$$\tan\theta=\left|\frac{-\frac{3}{5}+4}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)(-4)}\right|=\left|\frac{\frac{17}{5}}{\frac{17}{5}}\right|$$

i.e. $\tan\theta=1 \quad \therefore \quad \theta=45^0$

2. $y=x^3-x^2-x-3$ ಮತ್ತು $y=x^2-2x-1$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲು ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಸಮೀಕರಣಗಳು:

$$y=x^3-x^2-x-3 \quad \ldots(1)$$

$$y=x^2-2x-1 \quad \ldots(2)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ

$$x^3-x^2-x-3=x^2-2x-1$$

i.e. $x^3-2x^2+x-2=0$

$$x^2(x-2)+1(x-2)=0$$

$$\therefore \quad (x^2+1)(x-2)=0$$

$$\therefore \quad x^2+1=0, \quad x-2=0$$

$x^2=-1$ ಅಥವಾ $x=2$

$\therefore \quad x=\pm\sqrt{-1}$; ಆದರೆ $x\neq\sqrt{-1}$, ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆ

$x=2$ ನ್ನು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$y=2^2-2(2)-1=-1$$

$\therefore$ ಛೇದನ ಬಿಂದು $(2, -1)$ ಆಗುವುದು.

(1)ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\therefore \quad m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,\,-1)} = 3(2)^2 - 2(2) - 1 = 7$$

(2)ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2$$

$$\therefore \quad m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,\,-1)} = 2(2) - 2 = 2$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{7-2}{1+7(2)}\right| = \left|\frac{5}{15}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

3. $y^2 = 4x$ ಮತ್ತು $2y = x^2 + 3$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ (1, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ $m_1 = m_2$ ಆಗುವುದು.

$$y^2 = 4x$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $2y\frac{dy}{dx} = 4$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$$

ಮತ್ತು $m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\,2)} = \frac{2}{2} = 1$

$2y = x^2 + 3$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$2\frac{dy}{dx} = 2x \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = x$$

ಮತ್ತು $m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\,2)} = 1$

$\therefore \quad m_1 = m_2$

ಅಂದರೆ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು (1, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ $m_1 = m_2 \equiv m = 1$,

ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಓಟ $m' = -\frac{1}{m} = -1$.

(1, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ 1 ಆದಾಗ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow (y-2) = 1(x-1)$$

$\therefore \quad x - y + 1 = 0$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ)

ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬರೇಖೆ, $y - y_1 = m'(x - x_1)$

$(y-2) = -1(x-1) \Rightarrow x + y - 3 = 0$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬರೇಖೆ)

4. $y = 3x^2 - 4x + 5$ ಮತ್ತು $2y = 9 - x$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು (1, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದಾಗ $m_1 m_2 = -1$ ಆಗುವುದು. ಈಗ, ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣ

$$y = 3x^2 - 4x + 5$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = 6x - 4$

$$\therefore \quad m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\,4)} = (6x-4)\big|_{(1,\,4)} = 6-4 = 2$$

ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣ $2y = 9 - x$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $2\frac{dy}{dx} = -1$

i.e. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\,4)} = -\frac{1}{2}$$

ಈಗ $m_1 m_2 = 2 \times -\frac{1}{2} = -1$

ಆದ್ದರಿಂದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

5. $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $xy = c^2$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ, $c^4 = 32a^4$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ

$$y^2 = 4ax \qquad ...(1)$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $2y\frac{dy}{dx} = 4a$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\therefore \quad m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\,y_1)} = \frac{2a}{y_1}$$

$$xy = c^2 \qquad ...(2)$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)} = -\frac{y_1}{x_1}$$

ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಬೇಕಾದ ಷರತ್ತು $m_1 m_2 = -1$

$$\therefore \quad \frac{2a}{y_1} \times \left(-\frac{y_1}{x_1}\right) = -1$$

$$\therefore \quad x_1 = 2a$$

$x_1 = 2a$ ಯನ್ನು $xy = c^2$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$2ay_1 = c^2$$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{c^2}{2a}$$

ಇದನ್ನು $y^2 = 4ax$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\left(\frac{c^2}{2a}\right)^2 = 4a(2a) \qquad \therefore \quad c^4 = 32a^4$$

6. $ax^2 + by^2 = 1$ ಮತ್ತು $a^1x^2 + b^1y^2 = 1$ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a^1} - \frac{1}{b^1}$ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ (x_1, y_1) ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ

$$\therefore \quad ax_1^2 + by_1^2 = 1 \qquad \ldots(1)$$

$$a^1x_1^2 + b^1y_1^2 = 1 \qquad \ldots(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x_1^2 ಮತ್ತು y_1^2 ಗೆ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ,

$$x_1^2 = \frac{b^1 - b}{ab^1 - ba^1}, \quad y_1^2 = \frac{a - a^1}{ab^1 - ba^1}$$

$ax^2 + by^2 = 1$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$2ax + 2by\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2ax}{2by}$$

$$\therefore \quad m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \left.\frac{-ax}{by}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \frac{-ax_1}{by_1}$$

$a^1x^2 + b^1y^2 = 1$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$2a^1x + 2b^1y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2a^1x}{2b^1y}$$

$$m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \frac{-a^1x_1}{b^1y_1}$$

ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ,

$$m_1m_2 = -1$$

$$\therefore \quad \left(\frac{-ax_1}{by_1}\right)\left(-\frac{a^1x_1}{b^1y_1}\right) = -1$$

$$\therefore \quad aa^1x_1^2 + bb^1y_1^2 = 0$$

x_1^2 ಮತ್ತು y_1^2 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$aa^1\left(\frac{b^1-b}{ab^1-ba^1}\right) + bb^1\left(\frac{a-a^1}{ab^1-ba^1}\right) = 0$$

$$\therefore \quad aa^1b^1 - aa^1b + bb^1a - bb^1a^1 = 0$$

aba^1b^1 ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b^1} + \frac{1}{a^1} - \frac{1}{a} = 0$$

ಅಥವಾ $\quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a^1} - \frac{1}{b^1}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

I. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $x^2 = 4y$ ಮತ್ತು $y = 6 - x^2$, (2, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ
2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ ಮತ್ತು $y^2 = 4x - 15$, (4, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

3. $y^2 = 4x$ ಮತ್ತು $x^2 = 4y$, (4, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

4. $y = \frac{x+3}{x^2+1}$ ಮತ್ತು $y = \frac{x^2-7x+11}{x-1}$, (2, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

5. $y^2 = 4x$ ಮತ್ತು $x^2 = 2y-3$, (1, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

II. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $x^2 + y^2 = 5$ ಮತ್ತು $y^2 = 4x$

2. $x^2 = y$ ಮತ್ತು $y = 8 - x^2$

3. $y = x^2 - 1$ ಮತ್ತು $y = -2x^2 + 2$

4. $2y^2 = x^3$ ಮತ್ತು $y^2 = 32x$

5. $xy = a^2$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 = 2a^2$

6. $x^2 + y^2 = 18$ ಮತ್ತು $x^2 = 3y$

III. ಕೆಳಗಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

1. $y = x^3$ ಮತ್ತು $6y = 7 - x^2$, (1, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$, $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

3. $y = x^3$ ಮತ್ತು $6y = 7 - x^2$, (1, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

4. $x^2 - 3xy^2 = -2$ ಮತ್ತು $3x^2y - y^3 = 2$

5. $y = 2x^2 + 3x$ ಮತ್ತು $x + 3y = 3x^2$, (0, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

IV. ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು $y = 3x^2 + 7x + 4$ ಮತ್ತು $y = x^3 - 3x^2 - 8x - 4$ ಪರಸ್ಪರ (−1, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

V. $y = 6 + x - x^2$ ಮತ್ತು $y(x-1) = x + 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ (2, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

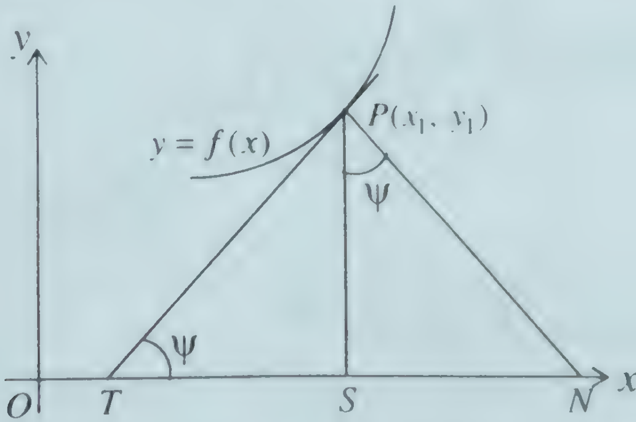
VI. ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ ಮತ್ತು $y^2 = 16x$ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ $a^2 = \frac{4}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

VII. $y^2 = 8Kx$ ಮತ್ತು $xy = 2p$ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ, $p^2 = 128k^4$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

VIII. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ $a - b = A - B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11.4 ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆ

$y = f(x)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು PS ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 11.7). P ಸಿಂದ PSನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. $P\hat{T}N = \psi$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 11.7

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan\psi$ (ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ)

STಯನ್ನು **ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ** ಮತ್ತು SNನ್ನು **ಉಪಲಂಬರೇಖೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ $PS = y$

ಚಿತ್ರ 11.7 ರಿಂದ, $\frac{ST}{PS} = \cot\psi$

$$\therefore \quad ST = PS \cdot \cot\psi$$

$$ST = \left.\frac{y}{dy/dx}\right|_{(x_1,\, y_1)} \quad \left[\because \cot\psi = \frac{1}{\tan\psi} = \frac{1}{dy/dx}\right]$$

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $= \left.\frac{y}{dy/dx}\right|_{(x_1,\, y_1)}$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ $SN = y\tan\psi = y\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y^2 = 2x + 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ (4, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y^2 = 2x + 1$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $2y \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $ST = \left.\frac{y}{(dy/dx)}\right|_{(4,\, 3)}$

$$= \left.\frac{y}{(1/y)}\right|_{(4,\, 3)} = (3)^2 = 9$$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ $SN = y \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,\, 3)} = y \cdot \frac{1}{y} = 1$

2. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ ಎಂಬರೇಖೆಯ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = a(1-\cos\theta)$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $\frac{dy}{d\theta} = a(\sin\theta)$

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$

$\therefore$ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, $ST = \left.\frac{y}{(dy/dx)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$

$$= \left.\frac{a(1-\cos\theta)}{\cot\theta/2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{a(1-0)}{1} = a$$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ $SN = y \cdot \frac{dy}{dx}$

$$SN = a(1-\cos\theta)\left.\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$SN = a(1-0)(1) = a$$

$\therefore \quad ST = SN = a$

[ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಹೆಸರು ಸೈಕ್ಲಾಯ್ಡ್ (cycloid)]

3. $xy = c^2$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು y ನಿರ್ದೇಶಕದ ಘನಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$xy = c^2$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left(-\frac{y}{x}\right)$$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ $SN = y \cdot \dfrac{dy}{dx} \quad = y\left(-\dfrac{y}{x}\right)$

$$SN = -\frac{y^2}{x} \qquad ...(1)$$

$$xy = c^2 \Rightarrow x = \frac{c^2}{y}$$

ಇದನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $SN = \dfrac{-y^2}{(c^2 / y)}$

$$SN = -\frac{1}{c^2}\, y^3 = Ky^3, \quad \left(K = -\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\therefore \qquad SN \propto y^3$$

[ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಹೆಸರು **ರೆಕ್ಟ್ಯಾಂಗುಲರ್ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾ**]

4. $y^n = a^{n-1}x$ ರೇಖೆಯ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಾದರೂ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ nನ ಬೆಲೆ ಏನು?

$$y^n = a^{n-1}x$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $ny^{n-1}\dfrac{dy}{dx} = a^{n-1}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a^{n-1}}{ny^{n-1}}$$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ, $SN = y \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$$SN = y \cdot \frac{a^{n-1}}{n \cdot y^{n-1}}$$

$$= y^{2-n} \cdot \frac{a^{n-1}}{n}$$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ $SN = K$

$$\therefore \quad y^{2-n} \frac{a^{n-1}}{n} = K \cdot y^0 \Rightarrow y^{2-n} = y^0 \quad \therefore \; n = 2$$

5. $ay^2 = (x+b)^3$ ರೇಖೆಯ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ವರ್ಗವು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಗೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನಾವು $(ST)^2 \propto SN$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ $\frac{(ST)^2}{SN} = K$ (ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ) ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$P(x_1, y_1)$ ಯಾವುದಾದರೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು.

$$ay^2 = (x+b)^3$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $a \cdot 2y\frac{dy}{dx} = 3(x+b)^2$

i.e. $$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x+b)^2}{2ay}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)} = \frac{3(x_1+b)^2}{2ay_1}$$

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $ST = \left.\frac{y}{dy/dx}\right|_{(x_1, y_1)} = \frac{y_1}{\left(\frac{3(x_1+b)^2}{2ay_1}\right)}$

$$= \frac{2ay_1^2}{3(x_1+b)^2}$$

ಆದರೆ $ay_1^2 = (x_1+b)^3$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$ST = \frac{2(x_1+b)^3}{3(x_1+b)^2} = \frac{2}{3}(x_1+b)$$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ, $SN = y \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)}$

$$= y_1\left(\frac{3(x_1+b)^2}{2ay_1}\right) = \frac{3(x_1+b)^2}{2a}$$

$$\therefore \quad \frac{(ST)^2}{SN} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 (x_1+b)^2}{\frac{3}{2a}(x_1+b)^2} = \frac{8a}{27} = \text{ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ.}$$

ಅಂದರೆ $(ST)^2 \propto SN$

6. $x^3y^2 = a^4$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x ನಿರ್ದೇಶಕದಂತೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಂದರೆ $ST \propto x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. ಈಗ

$$x^3y^2 = a^4$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $x^3 2y\frac{dy}{dx} + y^2 \cdot 3x^2 = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y^2}{2yx^3} = \frac{-3y}{2x}$$

$\therefore$ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, $ST = \frac{y}{(dy/dx)}$

$$= \frac{y}{-\frac{3y}{2x}} = -\frac{2xy}{3y} = -\frac{2}{3}x$$

i.e. $\quad ST = Kx \quad \left(K = -\frac{2}{3}\right)$

ಅಂದರೆ $ST \propto x$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ ರೇಖೆಗೆ (1, 1)ರಲ್ಲಿ

   ii) $x^2 + xy + y^2 = 7$ ರೇಖೆಗೆ (1, −3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

   iii) $y^2(6-x) = x^3$ ರೇಖೆಗೆ $y = -3$ ರಲ್ಲಿ

   iv) $\frac{xy}{x+y} = 2$ ರೇಖೆಗೆ $y = 4$ ರಲ್ಲಿ

   v) $x^2 - xy + y^2 = 7$ ಗೆ (−1 , 2)ರಲ್ಲಿ

   vi) $x = a\cos^3\theta,\ y = b\sin^3\theta$ ಗೆ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ರಲ್ಲಿ

   vii) $y^2 = 8x$ ಗೆ (2, 4)ರಲ್ಲಿ

   viii) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ಗೆ $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ ರಲ್ಲಿ.

2. $y^2 = 4ax$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು x ನಿರ್ದೇಶಕದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು x ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $x^m y^n = a^{m+n}$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು x ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $x^5 = ay^6$ ರೇಖೆಯ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ವರ್ಗವು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಘನಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $y = be^{x/a}$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $ax^2 + by^2 = k$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು x ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $y = a\log(x^2 - a^2)$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಲಂಬರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $x^{m+n} = a^{m-n}y^{2n}$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ mನೇ ಘಾತವು, ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ nನೇ ಘಾತದ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11.5 ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕವು ಒಂದು ದರಮಾಪಕ

$y = f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $x = a$ ಆದಾಗ $y = f(a)$ ಮತ್ತು $x = a + h$ ಆದಾಗ $y = f(a+h)$ ಆಗುವುದು. x ಚರವು aಯಿಂದ $a+h$ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ yಚರವು $f(a)$ಯಿಂದ $f(a+h)$ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದೆ. yನಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ $f(a+h) - f(a)$ ಮತ್ತು xನಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ $a + h - a = h$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{y\text{ನಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ}}{x\text{ನಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ}}$$

$h \to 0$ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

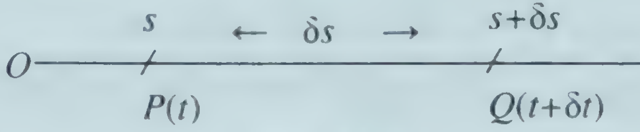
$$\lim_{h \to 0}\left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right] = f'(a)$$

$f'(a)$ ಬೆಲೆಯು $x = a$ ನಲ್ಲಿ $y = f(x)$ನ ತಾತ್ಕಲಿಕ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ(rate)ವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ಎನ್ನುವುದು (xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ) yನ ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ

ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದು OA ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. O ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು. 't' ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ, $t+\delta t$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ತರುವಾಯ Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರಲಿ. ವಸ್ತುವು Pಯುವರೆಪಿಗೆ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ s ಹಾಗೂ Qಯುವರೆಪಿಗೆ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ $s+\delta s$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.8).



ಚಿತ್ರ 11.8

ಅಂದರೆ $OP = s,\ OQ = s+\delta s \quad \therefore\ PQ = \delta s$

δt ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವು δS ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore\ \dfrac{\delta s}{\delta t}$ ಎಂಬುದು ಸರಾಸರಿ ವೇಗವನ್ನು ಕೊಡುವುದು.

Q ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿದ್ದಂತೆ $\delta t \to 0$ ಆಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ Pನಲ್ಲಿನ **ತಾತ್ಕಾಲಿಕವೇಗ,** $\lim_{\delta t\to 0}\dfrac{\delta s}{\delta t} = \dfrac{ds}{dt}$

ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ವೇಗವನ್ನು Vಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\therefore\ V = \frac{ds}{dt}$$

ಇದೇ ರೀತಿ ತಾತ್ಕಲಿಕವಾಗಿ Vಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ನಮಗೆ **ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ** ಸಿಗುವುದು. ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ(acceleration)ವನ್ನು a ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

$$a = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

i.e. $a = v\frac{dv}{ds}$

$a=0$ ಆದರೆ ವೇಗವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು ವಸ್ತುವು t ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ತರುವಾಯ s ಮೀಟರುಗಳ ಚಲಿಸಿದೆ ಮತ್ತು $s = t^3 - 3t^2 + 12t + 10$.
   i) ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷಗಳನ್ನು 2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ
   ii) ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ 12 ಮಿ/ಸೆ^{2} ಇದ್ದಾಗ ಅದರ ವೇಗ
   iii) ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ $a=0$ ಆದಾಗ ವೇಗ ಮತ್ತು ಚಲಿಸಿದ ದೂರ
   iv) ವೇಗ = 9ಮಿ/ಸೆ ಇದ್ದಾಗ ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ $s = t^3 - 3t^2 + 12t + 10$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 12$$

ಪುನಃ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$$

(i) $t = 2$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಇದ್ದಾಗ,

ವೇಗ $v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3t^2 - 6t + 12\big|_{t=2}$

ಅಂದರೆ $v = 12 - 12 + 12$ $\therefore v = 12$ ಮಿ/ಸೆ.

ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6\big|_{t=2}$

$= 12 - 6 = 6$ ಮಿ/ಸೆ^{2}

(ii) ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ = 12ಮಿ/ಸೆ^{2}

$$\therefore \quad \frac{d^2s}{dt^2} = 12$$

ಅಂದರೆ $6t-6=12 \Rightarrow 6t=18 \quad \therefore t=3$

$t=3$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳಾದಾಗ

$$v=\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = 3t^2-6t+12\Big|_{t=3}$$

i.e. $v=3(3)^2-6(3)+12 = 27-18+12 = 21$ ಮಿ/ಸೆ.

(iii) $a=0$ ಆದಾಗ

$$6t-6=0 \quad \therefore 6t=6 \quad \therefore t=1$$

$$v=\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = 3t^2-6t+12\Big|_{t=1} = 3-6+12 = 9 \text{ ಮಿ/ಸೆ}$$

$$s_{t=1} = t^3-3t^2+12t+10\Big|_{t=1}$$

i.e. $s=1-3+12+10=20$ ಮಿ

(iv) ವೇಗ = 9ಮಿ/ಸೆ.

ಅಂದರೆ $\frac{ds}{dt}=9$

i.e. $3t^2-6t+12=9$

$\therefore \quad 3t^2-6t+3=0$

i.e. $t^2-2t+1=0$

ಅಥವಾ $(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$

$\therefore \quad s\Big|_{t=1} = t^3-3t^2+12t+10\Big|_{t=1} = 1-3+12+10 = 20$ ಮಿ.

2. ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಕಾರಿಗೆ ಬ್ರೇಕನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ, ಕಾರು s ದೂರವನ್ನು t ಸೆಕೆಂಡುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $s=2t-15t^2$ ಆಗಿರಲಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಕಾರು ಯಾವಾಗ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ? ಕಾರು ನಿಲ್ಲುವ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ದೂರ ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕಾರಿನ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ $s = 2t - 15t^2$ ...(1)

ಬ್ರೇಕನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ, ವೇಗವು 0 ಆಗುವುದು.

i.e. $\frac{ds}{dt} = 0$

(1)ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ, $\frac{ds}{dt} = 2 - 30t$

$\therefore\ 2 - 30t = 0$ i.e. $30t = 2 \ \therefore\ t = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳು.

ಅಂದರೆ $\frac{1}{15}$ ಸೆಕೆಂಡಿನ ನಂತರ ಕಾರು ನಿಲ್ಲುವುದು.

$t = \frac{1}{15}$ ಸೆ. ಇದ್ದಾಗ $s = 25 - 15t^2\Big|_{t=\frac{1}{15}}$

$$= 2\left(\frac{1}{15}\right) - 15\left(\frac{1}{15}\right)^2$$

i.e. $s = \frac{2}{15} - \frac{1}{15} = \frac{1}{15}$ ಮಿ.

ಅಂದರೆ ಕಾರು ನಿಲ್ಲುವ ಮೊದಲು $\frac{1}{15}$ ಮಿ. ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ $= \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$

ವೇಗ $v = 2 - 30t$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\therefore\ \frac{dv}{dt} = -30 \text{ ಮಿ/ಸೆ}^2$$

3. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 8 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ/ಸೆ. ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದೆ. ಆ ಗೋಳದ ಗಾತ್ರವು $\frac{500}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮಿ. ಇದ್ದಾಗ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿದ್ದು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ S ಮತ್ತು ಗಾತ್ರದ V ಆಗಿರಲಿ. ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ

$$S = 4\pi r^2 \text{ ಮತ್ತು } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ದತ್ತ $\frac{dS}{dt} = 8$ ಚ.ಸೆಂ.ಮಿ/ಸೆ $\quad V = \frac{500}{3}$ ಘನ.ಸೆಂ.ಮಿ.

ನಾವು $\frac{dr}{dt}$ ಮತ್ತು $\frac{dV}{dt}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$S = 4\pi r^2$$

ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{dS}{dt} = 4\pi \cdot 2r\frac{dr}{dt}$$

ಅಂದರೆ $\quad 8 = 8\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \ldots(1)$

ಈಗ $V = \frac{500\pi}{3}$

i.e. $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{500\pi}{3} \qquad \therefore \qquad r^3 = 125$ ಅಥವಾ $r = 5$

$$8\pi r\frac{dr}{dt} = 8$$

$$\therefore \; 8\pi(5)\frac{dr}{dt} = 8 \qquad \therefore \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{5\pi}$$

ಈಗ $\quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2\frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi(5)^2 \cdot \frac{1}{5\pi}$$

$\frac{dV}{dt} = 20$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.ಸೆ.

4. ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮಸಿಯ ಗುರುತು ಬ್ಲಾಟಿಂಗ್ ಪೇಪರ್‌ನ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿಯೇ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು

3 ಸೆಂ/ಸೆ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮಸಿಯು ತ್ರಿಜ್ಯದ ದರ ಹಾಗೂ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 4π ಸೆಂ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ.)

ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮಸಿಯು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರಲಿ, A ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ c ಆಗಿರಲಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ, $\frac{dc}{dt} = 3$ ಮತ್ತು $c = 4\pi$

ಆದರೆ $c = 2\pi r$

$\therefore \quad 2\pi r = 4\pi$

ಅಥವಾ $r = 2$ ಸೆಂ

$$\frac{dc}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}$$

$$3 = 2\pi \frac{dr}{dt} \quad \therefore \quad \frac{dr}{dt} = \frac{3}{2\pi}$$

ಈಗ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $A = \pi r^2$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2r \frac{dr}{dt} = \pi 2(2) \cdot \frac{3}{2\pi}$$

ಅಂದರೆ $\frac{dA}{dt} = 6$ ಚ.ಸೆಂ.ಮಿ/ಸೆ

5. 25 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು ಒಂದು ಗೋಡೆಗೆ ವಾಲಿಸಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿದರೆ ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳು ನುಣುಪಾದ ಗೋಡೆಗೆ ಆಲಿಸಿ ನಿಂತಿವೆ. ಏಣಿಯ ಕೆಳತುದಿಯು 5 ಅಡಿ/ಸೆ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಜಾರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದರ ಮೇಲ್ತುದಿಯು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಜಾರುವುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಏಣಿಯ ಕೆಳತುದಿಯು ಗೋಡೆಯಿಂದ 15 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

AB ಏಣಿ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.9). A ಎನ್ನುವುದು ಕೆಳತುದಿ, B ಎನ್ನುವುದು ಮೇಲ್ತುದಿ ಆಗಿರಲಿ. OB ಗೋಡೆ. x ಮತ್ತು y ಎನ್ನುವುದು Oನಿಂದ ಏಣಿಯ ಕೆಳತುದಿ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ತುದಿಯುವರೆಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.

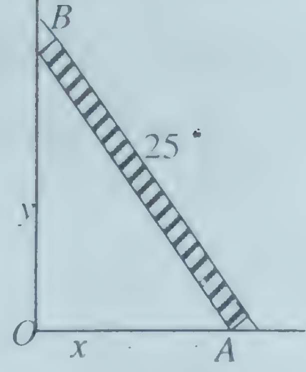
$$\therefore\ x^2 + y^2 = 25^2$$

$x = 15$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, $y^2 = 25^2 - 15^2$

$$y^2 = 625 - 225$$

$$y^2 = 400$$

$\therefore\ y = 20$ ಆಡಿ.



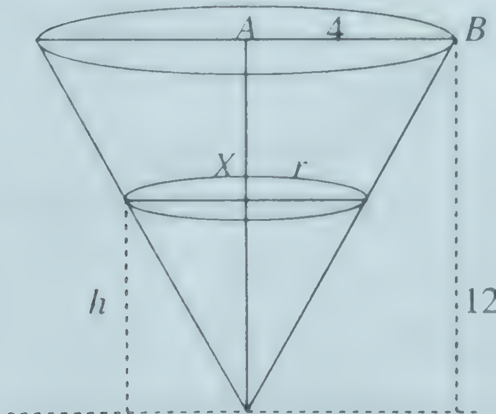
ಚಿತ್ರ 11.9

6. ಒಂದು ತಲೆಕೆಳಗಾದ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದ ನೀರಿನ ಪಾತ್ರೆಯಿಂದ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 8 ಸಿ.ಸಿ. ದರದಲ್ಲಿ ನೀರು ಸೋರಿಹೋಗುತ್ತಿದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯು ತಳ ವರ್ತುಲಾಕಾರ ಹೊಂದಿದ್ದು ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆಂ.ಮೀ ಇದೆ. ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ನೀರು ಸೋರುತ್ತಿರುವ ದರ ಎಷ್ಟು?

ಒಂದು ಲಂಬ ವರ್ತುಲಾಕಾರದ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿದ್ದು, ಅದರ ಎತ್ತರವು h ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಶಂಕುವಿನ ಗಾತ್ರವು

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 11.10ರಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 11.10

$AB = 4$ ಸೆ.ಮೀ., $OA = 12$ ಸೆ.ಮೀ., $OX = h$ ಮತ್ತು $XY = r$

$\Delta^{le} OXY \,|||^{r}\, \Delta^{le} OAB$

$\therefore \quad \frac{r}{h} = \frac{4}{12}$ ಅಥವಾ $r = \frac{1}{3}h$

$\therefore \quad v = \frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{9}\cdot h = \frac{\pi h^3}{27}$

$\therefore \quad h^3 = \frac{27}{\pi}v$

ಇದು h ಮತ್ತು vಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$3h^2\frac{dh}{dt} = \frac{27}{\pi}\frac{dv}{dt}$$

ಅಥವಾ $$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi h^2}\frac{dv}{dt}$$

ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಮತ್ತು ವೇಗದ ದತ್ತ ಬೆಲೆಗಳು

$$\frac{dv}{dt} = 8.\ h = 6 \quad \therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi\cdot 36}\cdot 8 = \frac{2}{\pi} \text{ ಸೆ.ಮೀ./ನಿ}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ $\frac{2}{\pi}$ ಸೆಂ.ಮೀ./ನಿ. ದರದಲ್ಲಿ ಇಳಿಯುತ್ತಿದೆ.

7. 26 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ಏಣಿಯು ಒಂದು ಗೋಡೆಗೆ ವಾಲಿಸಿ ನಿಂತಿದೆ. ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯು ಕ್ಷಿತಿಜದ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 3 ಅಡಿಗಳಂತೆ ಜಾರುತ್ತಿದೆ. ಏಣಿಯ ಕೆಳತುದಿ ಗೋಡೆಯಿಂದ 10 ಅಡಿ ಇದ್ದಾಗ (a) ವೇಗ, (b) ಏಣಿಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೋಡೆಯ ತಳಭಾಗದಿಂದ ಏಣಿಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವು x ಮತ್ತು y ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.11)

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 26^2 \qquad ...(1)$

ಕಾಲಸೂಚಿತವಾದ tಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ (1)ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad ...(2)$

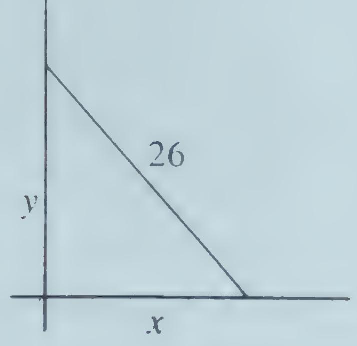
ಈಗ, $\frac{dx}{dt}=3$ ಮತ್ತು $x=10$

ಆದಾಗ, $y=24$ ಆಗುವುದು.

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$(10)3+24\frac{dy}{dt}=0$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dt}=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}$



ಚಿತ್ರ 11.11

ಆದ್ದರಿಂದ ಏಣಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ $\frac{5}{4}$ ಅಡಿಗಳ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಭಾಗದ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ $\frac{dy}{dt}$ಯ ಬೆಲೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ, t ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಏಣಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗವು ಕೆಳಭಾಗದ ಕಡೆಗೆ ಜಾರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4

1. ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಾ t ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ s ದೂರ ಚಲಿಸುವುದು ಮತ್ತು $s=t^3-6t^2+8t-4$. ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು 12ಮೀ/ಸೆ^{2} ಆಗುವ ಕಾಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಆಗ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು?
2. 6 ಅಡಿ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಮನುಷ್ಯನು 4ಮೈ/ಗಂಟೆಯ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿತಿಜಾಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೀಪದ ಕಂಬದಿಂದ ದೂರ ನಡೆಯುವನು. 20 ಅಡಿ ಎತ್ತರದ ಕಂಬದ ದೀಪದಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜಾಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಆತನ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು 10 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ 4 ಅಂಗುಲಗಳಿಂದ 12 ಅಂಗುಲಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಆದಾದ 5 ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ ಉಂಟಾಗುವ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ತ್ರಿಜ್ಯವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದೆ?

4. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು 4ಮೈ/ಗಂಟೆ ದರದಲ್ಲಿ 80 ಅಡಿ ಎತ್ತರದ ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಪಾದದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಪಾದದಿಂದ 60 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ದರದಿಂದ ತುದಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ?

5. ಮೇಲ್ಮೈ ಪಾದ 8 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು ಆಳ 12 ಅಂಗುಲ ಇರುವ ಶಂಕು-ಆಕೃತಿಯ (ಕಾನಿಕಲ್) ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗೆ ಒಂದು ದ್ರವವನ್ನು 10 ಅಂಗುಲ/ಸೆ.ನಂತೆ ಸುರಿಯುತ್ತಿದೆ. 9 ಅಂಗುಲದವರೆಗೆ ಪಾತ್ರೆ ತುಂಬಿದಾಗ ಎಷ್ಟು ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷದಿಂದ ದ್ರವದ ಮಟ್ಟ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿದೆ?

6. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈಲ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 8 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ/ಸೆ.ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದೆ. ಆ ಗೋಳದ ಗಾತ್ರವು 500 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮಸಿಯ ಗುರುತು ಬ್ಲಾಟಿಂಗ್ ಪೇಪರ್ ಮೇಲೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಾ ಇದೆ ಮತ್ತು t ಸೆಕೆಂಡ್‌ನಲ್ಲಿ $r = 2t^2 - \frac{t^3}{4}$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ತಿಳಿಯುವುದು. $t = 4$ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳು ಆದಾಗ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಬೆಲೂನಿನ ಗಾತ್ರವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 10ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದಾಗ, ಬೆಲೂನಿನಂತೆ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಉರುಳೆಯ (ಸಿಲಿಂಡರಿನ) ತ್ರಿಜ್ಯವು ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 2 ಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಏಕಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವುದು. ಎತ್ತರವು 20 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು 10 ಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಗಾತ್ರವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ವಸ್ತುವು t ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ s ಮೀಟರ್ ಚಲಿಸಿದರೆ, sಗೂ tಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಚಲಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭವಾದ 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ವೇಗ ಎಷ್ಟು? ವೇಗ ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಎಷ್ಟು?

a. $s = 2t^3 - 36t^2 + 50t - 35$

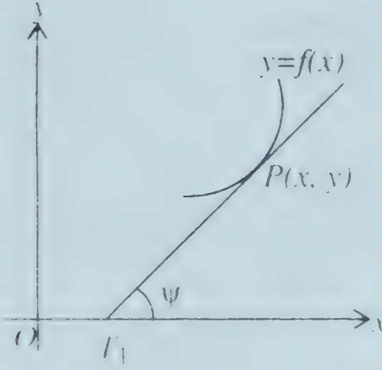
b. $s = t^3 - 3t^2$

c. $s = 10\cos\frac{t}{2}$

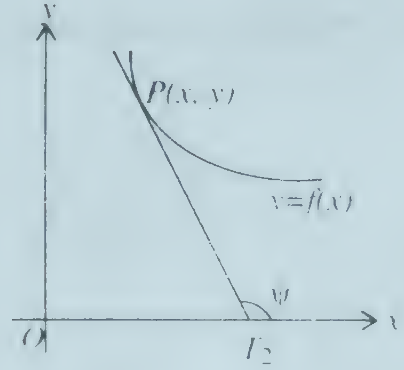
d. $s = 20 - 5t + t^3$

11.6 ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು

11.6.1 ವೃದ್ಧಿಸುವ ಮತ್ತು ಕ್ಷೀಣಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು



ಚಿತ್ರ 11.6.1



ಚಿತ್ರ 11.6.2

ಚಿತ್ರ 11.6.1ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ $y = f(x)$ ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $P(x, y)$ ಎನ್ನುವುದು $f(x)$ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು. x ವೃದ್ಧಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ, y ವೃದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. P ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಧನ x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ψ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಿ.

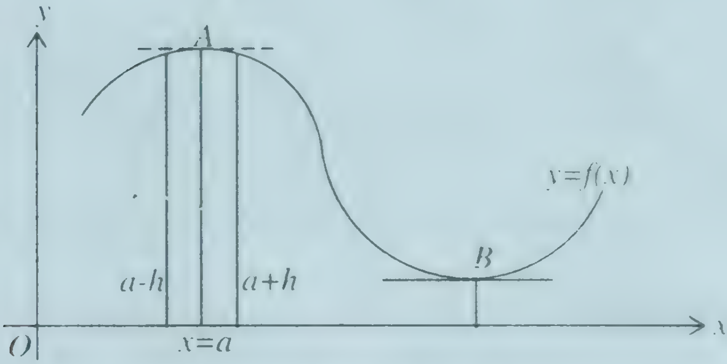
$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan\psi =$ ಧನಬೆಲೆ. x ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ, y ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದು.

ಆಗ $\frac{dy}{dx}$ ಧನಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 11.6.2ರಲ್ಲಿಇರುವಂತೆ, x ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಧನ x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ψ ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದಾಗ,

$\frac{dy}{dx} = \tan\psi$ ಋಣಾಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. x ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗಿ $\frac{dy}{dx}$ ಋಣಬೆಲೆಯಾಗುವುದು.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗದೆ ಹೆಚ್ಚೂ ಆಗದೆ ಇದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು **ಸ್ಥಾಯೀಬಿಂದು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\frac{dy}{dx} = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

11.6.2 ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು



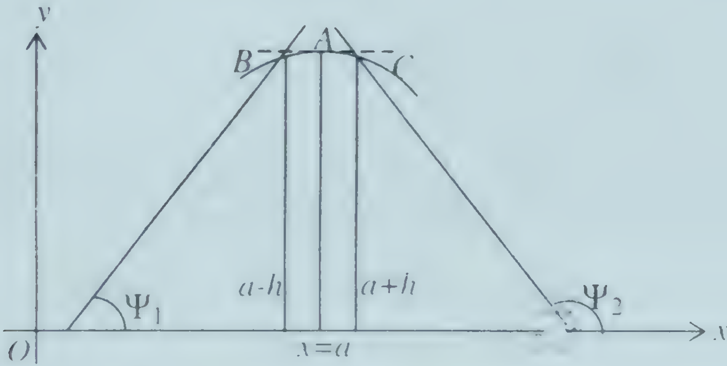
ಚಿತ್ರ 11.6.3

$y = f(x)$ ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗಿ ನಂತರ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು **'ಗರಿಷ್ಠಬೆಲೆ'** ಎನ್ನುವರು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯವರೆಗೆ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಹೋಗಿ ನಂತರ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದು. ಉತ್ಪನ್ನದ ಈ ಬೆಲೆಗೆ 'ಕನಿಷ್ಠ' ಬೆಲೆ ಎನ್ನುವರು.

ಚಿತ್ರ 11.6.3ರಲ್ಲಿ $y = f(x)$ ಎಂಬ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಮತ್ತು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಹೊಂದಿದೆ. A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ x ನ ನಿರ್ದೇಶಕ 'a' ಆಗಿದ್ದರೆ, y ನ ನಿರ್ದೇಶಕ $f(a)$ ಆಗಿರುವುದು. A ನ ಸಮೀಪ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ

y ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಗಿಂತ $f(a)$ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಇರುವುದು. $f(a) > f(a+h)$ ಮತ್ತು $f(a) > f(a-h)$ ಆಗಿರುವುದು. (h ಎನ್ನುವುದು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಣ್ಣ ಚರಸಂಖ್ಯೆ). ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = a$ ನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕಾದರೆ, $f(a) > f(a+h)$ ಮತ್ತು $f(a) > f(a-h)$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಉತ್ಪನ್ನವು ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಆಗಿರಲು ಷರತ್ತುಗಳು



ಚಿತ್ರ 11.6.4

A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. A ನಲ್ಲಿನ x ನಿರ್ದೇಶಕ 'a' ಆಗಿರಲಿ. $f(a) > f(a+h)$ ಮತ್ತು $f(a) > f(a-h)$. B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು A ಯ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. B ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಧನ x-ಅಕ್ಷದೊಡನೆ ψ ಕೋನವನ್ನೂ, C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ψ_2 ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಲಿ. B ನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx} = \tan\psi_1$ (ಧನಬೆಲೆ), C ನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx} = \tan\psi_2$ (ಋಣಬೆಲೆ). A ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\frac{dy}{dx} = 0$. ಈಗ $\frac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆಯು ಧನಬೆಲೆಯಿಂದ ಋಣಬೆಲೆಗೆ x ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{dy}{dx}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಅಂದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಬೆಲೆಯು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಋಣ ಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

1. ಆದ್ದರಿಂದ $x = a$ ನಲ್ಲಿ $y = f(x)$ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರಲು ಇರಬೇಕಾದ ಷರತ್ತುಗಳು:

   (i) $x = a$ ನಲ್ಲಿ $\frac{dv}{dx} = 0$ ಮತ್ತು

   (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (ಋಣಬೆಲೆಯಾಗಿರಬೇಕು)

2. ಹೀಗೆಯೇ $x = a$ ನಲ್ಲಿ $y = f(x)$ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿರಲು ಷರತ್ತುಗಳು:

   (i) $\frac{dy}{dx} = 0$ ಮತ್ತು (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು ಉತ್ಪನ್ನದ ದೊಡ್ಡಬೆಲೆ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಅದೇರೀತಿ ಕನಿಷ್ಠಬೆಲೆಯು ಅತಿಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯಾಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಉತ್ಪನ್ನವು ಅನೇಕ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಕನಿಷ್ಠ ಹಾಗೂ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $2x^3 - 12x^2 + 18x + 1$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 0.\ 2$ ಗಳಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಸುವುದು. ಕ್ಷೀಣಿಸುವುದು ಮತ್ತು $x = 3$ ಸ್ಥಾಯೀಬಿಂದು ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18$$

$x = 0$ ಆದಾಗ, $f'(0) = 18 > 0$

$\therefore$ $x = 0$ ಷಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ವೃದ್ಧಿಸುವುದು.

$x = 2$ ಆದಾಗ, $f'(2) = 6(2)^2 - 24(2) + 18$

$$= 24 - 48 + 18 = -6 < 0$$

$\therefore$ $f(x)$, $x = 2$ ನಲ್ಲಿ ಕ್ಷೀಣಿಸುವುದು.

$x = 3$ ಆದಾಗ, $f'(3) = 6(3)^2 - 24(3) + 18$

$$= 54 - 72 + 18 = 0$$

$\therefore$ $x = 3$ ನಲ್ಲಿ $f'(x) = 0$ ಆಗಿ $x = 3$ ಸ್ಥಾಯೀಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದು.

2. xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $x^3-6x^2-36x+7$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು (i) ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವುದು (ii) ಕ್ಷೀಣಿಸುವುದು ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

$$f(x)=x^3-6x^2-36x+7$$

$$f'(x)=3x^2-12x-36$$

$$=3(x^2-4x-12)$$

$$=3(x-6)(x+2)$$

(i) $x<-2$ ಆದಾಗ xನ ಬೆಲೆಯು $-\infty$ ಮತ್ತು -2ಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದಾಗ $(x+2)$ ಮತ್ತು $(x-6)$ ಎರಡೂ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ $f'(x)>0$, ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವುದು.

(ii) xನ ಬೆಲೆ -2ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇದ್ದು 6ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ $x+2>0$, $x-6<0$ ಆಗುವುದು. $\therefore \dfrac{df}{dx}<0$ ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ಕ್ಷೀಣಿಸುವುದು.

(iii) $x>6$ ಆದರೆ $(x-6)$ ಮತ್ತು $(x+2)$ ಎರಡೂ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುದು $\dfrac{df}{dx}>0$. ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ವೃದ್ಧಿಸುವುದು.

(iv) $x=6$ ಅಥವಾ $x=2$ ಆದಾಗ $\dfrac{df}{dx}=0$, y ಸ್ಥಾಯೀಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು **ತಿರುಗಣೆ ಬಿಂದುಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^3-12x+5$

$y=x^3-12x+15$ ಇರಲಿ.

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-12, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=6x \qquad ...(1)$$

y ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಬೇಕಾದರೆ $\frac{dy}{dx}=0$ ಆಗಬೇಕು.

$\therefore \quad 3x^2-12=0$

ಅಂದರೆ, $\quad x^2=4$

$\therefore \quad x=\pm 2$

$x=2$ ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$\frac{d^2y}{dx^2}=12>0$

$\therefore$ $x=2$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$y|_{x=2}=x^3-12x+5|_{x=2} \quad =8-24+5=-11$

$x=-2$ ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\frac{d^2y}{dx^2}=6\times -2=-12<0$

$\therefore$ $x=-2$ ನಲ್ಲಿ y ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad y|_{x=-2}=(-2)^3-12(-2)+5 \quad =-8+24+5$

$y_{\text{ಗರಿಷ್ಠ}} \quad =21$

(ii) xe^{-x}

$y=xe^{-x}$ ಆಗಿರಲಿ

$\frac{dy}{dx}=-xe^{-x}+e^{-x}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-x(-e^{-x})+e^{-x}(-1)+e^{-x}(-1) \quad =xe^{-x}-2e^{-x}$

ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಷರತ್ತು $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \; -xe^{-x}+e^{-x}=0$

ಅಂದರೆ $\quad e^{-x}(-x+1)=0$

i.e. $e^{-x} = 0, \; -x + 1 = 0$

$\therefore \quad x = 1 \quad$ (ಕಾರಣ $e^{-x} \neq 0$)

$x = 1$ ನ್ನು $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-1} - 2e^{-1} = -e^{-1} = \frac{-1}{e} < 0$$

$\therefore \; x = 1$ ರಲ್ಲಿ y ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$$y_{\text{ಗರಿಷ್ಠ}} = y\Big|_{x=1} = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(iii) x^x

$y = x^x$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad \log y = x \log x$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \log x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y[1 + \log x] = x^x[1 + \log x]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x}\right) + (\log x + 1) \cdot x^x(1 + \log x)$$

$\dfrac{dy}{dx} = 0$, ಕನಿಷ್ಠ ಅಥವ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಹೊಂದಲು ಬೇಕಾದ ಷರತ್ತು.

$\therefore \; y(1 + \log x) = 0 \Rightarrow \log_e x = -1$

$\therefore \quad x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$x = \dfrac{1}{e}$ ನ್ನು $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ ಆಗುವುದು

$\therefore \quad x = \dfrac{1}{e}$ ನಲ್ಲಿ y ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು.

$$y_{\text{ಕನಿಷ್ಠ}} = y\Big|_{x=\frac{1}{e}} = x^x = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

4. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 48, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x ಮತ್ತು y ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad x + y = 48 \Rightarrow y = 48 - x$

ಗುಣಲಬ್ಧ P ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad P = xy$

ಅಂದರೆ $\quad P = x(48 - x) \qquad (\because y = 48 - x)$

$$P = 48x - x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dP}{dx} = 48 - 2x, \quad \frac{d^2P}{dx^2} = -2 < 0$$

Pಯು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಲು ಆವಶ್ಯಕ ಷರತ್ತು $\frac{dP}{dx} = 0$

$\therefore \quad 48 - 2x = 0$

$\therefore \quad x = 24$

$y = 48 - 24 = 24$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 24, 24.

5. $\frac{\log x}{x}$ ನ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, $x > 0$.

$y = \frac{\log x}{x}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \log x)2x}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2x\log x}{x^4} = \frac{-3x + 2x\log x}{x^4}$$

y ಗರಿಷ್ಠವಾಗಲು ಆವಶ್ಯಕ ಷರತ್ತು $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \log_e x = 0$

ಅಂದರೆ $\log_e x = 1 \qquad \therefore \quad x = e$

$x = e$ ಯನ್ನು $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

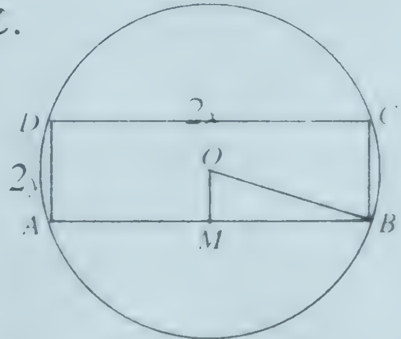
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-3e + 2e}{e^4} = \frac{-1}{e^3} < 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = e$ ನಲ್ಲಿ y ಯು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad y_{\text{ಗರಿಷ್ಠ}} = y\big|_{x=e} = \frac{\log_e e}{e} = \frac{1}{e}$

6. ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸಿ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಚಚ್ಚೌಕವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಆಯತದ ಉದ್ದ $2x$ ಮತ್ತು $2y$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದನ್ನು O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ r ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಆಯತವು ಅಂತರ್ಲೇಖಿತ ವಾಗಿರಲಿ. OB ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, O ನಿಂದ OM ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ ಚಿತ್ರ (11.6.5).



ಚಿತ್ರ 11.6.5

$\therefore \quad OM = y, MB = x$

$\therefore \quad OB^2 = OM^2 + MB^2$

i.e. $\quad r^2 = y^2 + x^2$

ಅಥವಾ $\quad y^2 = r^2 - x^2$

$\therefore \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$

A ಆಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad A = (2x)(2y)$

$\quad A = 4xy$

$$\therefore \quad A = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dx} = 4\sqrt{r^2 - x^2} + 4x \cdot \frac{(-x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= 4\left[\frac{r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]$$

$$= \frac{4(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

A ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad 4(r^2 - 2x^2) = 0$

ಅಂದರೆ $\quad r^2 = 2x^2 \qquad \therefore \quad x = \frac{r}{\sqrt{2}}$

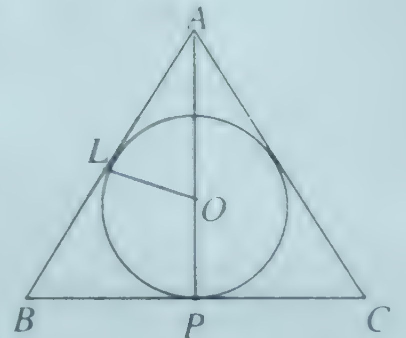
ಆಗ $\quad y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$

$\therefore \qquad x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ ಆಯತವು ವರ್ಗ(ಚಚ್ಚೌಕ)ವಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

7. r-ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸಿದರೆ ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆಯು $(6\sqrt{3})r$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರಲಿ. AO ರೇಖೆಯು BC ಯನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.6.6). A ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು P ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು B ಮತ್ತು C ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ABC ತ್ರಿಕೋಣವು



ಚಿತ್ರ 11.6.6

ಉಂಟಾಗುವುದು. $OA = x$ ಆಗಿರಲಿ. $x > r$, $OL = r$ ಬಾಹು ABಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad AL = \sqrt{OA^2 - OL^2}$$

$$\text{i.e.} \quad AL = \sqrt{x^2 - r^2}$$

$$BP = AP \tan B\hat{A}P$$

$$= AP \tan L\hat{A}O$$

$$= AP \cdot \frac{OL}{AL} = (r + x)\frac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

ABCಯ ಸುತ್ತಳತೆ s ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad s = AB + BC + CA$$

$$= AB + AC + BC$$

$$= 2AB + 2BP$$

$$= 2(AL + LB) + 2BP$$

$$= 2AL + 4BP \qquad (\because LB = BP)$$

$$= 2\sqrt{x^2 - r^2} + \frac{4(r + x)r}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

$$= \frac{2(x+r)^2}{\sqrt{x^2 - r^2}} \qquad \ldots(1)$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dx} = 2\left[\frac{2(x+r)\sqrt{x^2 - r^2} - x(x+r)^2(x^2 - r^2)^{-1/2}}{(x^2 - r^2)}\right]$$

$$= \frac{2(x+r)(x^2 - xr - 2r^2)}{(x^2 - r^2)^{3/2}}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{ds}{dx}=0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $x=-r$ ಅಥವಾ $x=2r$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಆದರೆ $x=-r$ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. $\therefore$ $x=2r$ ಇದನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ

$S=6\sqrt{3}\,r$ ಬರುವುದು.

8. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೊತ್ತ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ, ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಈ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\frac{\pi}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ABC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರೀಕೋಣದಲ್ಲಿ AC ವಿಕರ್ಣ y ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು x ಆಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.6.7).

$x+y=K$ (ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ)

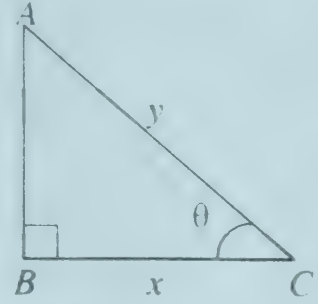
$\therefore \quad y=K-x$

ಈಗ $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}$

i.e. $AB=\sqrt{y^2-x^2}$

$$=\sqrt{(K-x)^2-x^2}$$

$$=\sqrt{K^2-2Kx}$$



ಚಿತ್ರ 11.6.7

ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $A=\frac{1}{2}AB\cdot BC$

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{K^2-2Kx}\cdot x$$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dx}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{K^2-2Kx}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{K^2-2Kx}}(-2K)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{K^2-2Kx-Kx}{\sqrt{K^2-2Kx}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{K^2-3Kx}{\sqrt{K^2-2Kx}}\right]$$

A ಯು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, $\frac{dA}{dx}=0$

$\therefore \quad K^2-3Kx=0 \quad$ i.e. $\quad K(K-3x)=0$

$\therefore \quad x=\frac{K}{3} \quad (\because K\neq 0)$

$\therefore \quad y=K-x=K-\frac{K}{3}=\frac{2K}{3}$

ಚಿತ್ರ 11.6.7ನಲ್ಲಿ $\cos\theta=\frac{x}{y}$

$\therefore \quad \cos\theta=\frac{K/3}{2K/3}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}$

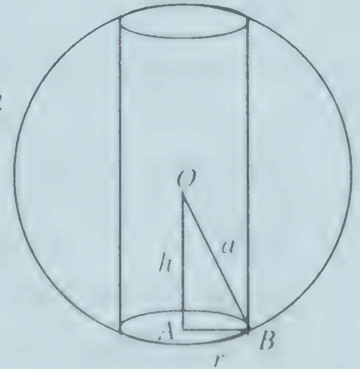
$\therefore \quad \theta=\frac{\pi}{3}$

9. ಒಂದು ಉರುಳೆ(ಸಿಲಿಂಡರ್)ಯನ್ನು a ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಲೀನಗೊಳಿಸಿದ್ದು ಅದರ ಗಾತ್ರ ಗರಿಷ್ಠವಾದಾಗ, ಉರುಳೆಯ ಎತ್ತರ $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ $2h$ ಮತ್ತು r ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.
ಚಿತ್ರ 11.6.8ರಲ್ಲಿ $OA=h$, $OB=a$, $AB=r$

$\therefore \quad OB^2=OA^2+AB^2$

i.e. $a^2=h^2+r^2 \Rightarrow r^2=a^2-h^2$



ಚಿತ್ರ 11.6.8

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಗಾತ್ರ V ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $V=\pi r^2(2h)$

$=2\pi r^2 h$

$V=2\pi h(a^2-h^2)$

ಅಂದರೆ $\quad V=2\pi(a^2h-h^3)$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = 2\pi(a^2 - 3h^2)$$

ಮತ್ತು $\dfrac{d^2V}{dh^2} = 2\pi(-6h) = -12\pi h$

ಗಾತ್ರವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, $\dfrac{dV}{dh} = 0$

$\therefore \ a^2 - 3h^2 = 0 \qquad \therefore \ h^2 = \dfrac{a^2}{3}$

$$\therefore \quad h = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ $= 2h \ = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.5

1. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (a) $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$
   (b) $4x^3 - 15x^2 + 12x + 7$
   (c) $2x^5 - 10x^2 + 10x^3 - 2$
   (d) $8x^5 - 15x^4 + 10x^2$
   (e) $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$

2. $y = \sin x + \cos 2x$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳ ಬಗೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ.
3. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 100. ಅದರ ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಕರ್ಣದ ಬೆಲೆಯು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ತ್ರಿಕೋಣವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋಣವಾಗಬೇಕು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಚಚ್ಚೌಕದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಚಚ್ಚೌಕದ ಬಾಹುವು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. x ಮತ್ತು y ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $x > 0$ ಮತ್ತು $xy = l$ ಹಾಗೂ $x + y$ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು r ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸಿದ್ದು ಅದರ ಗಾತ್ರವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ $\frac{4r}{3}$ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

"ಇಂದಿನ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತವು ಎಷ್ಟೊಂದುಮಟ್ಟಿಗೆ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದೆ ಎಂಬುದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಆಶ್ಚರ್ಯವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇಂದಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಹಾಗೂ ಬೀಜಗಣಿತಗಳ ಸ್ವರೂಪ ಹಾಗೂ ಅಂತರಾಳ ಎರಡೂ ಭಾರತೀಯವೇ"

– ***ಫ್ಲೋರಿಯನ್ ಕೇಜೋರಿ,***
ಪ್ರಪಂಚದ ಗಣಿತ ಇತಿಹಾಸದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ತಜ್ಞ

"ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಮೂಲಕ – ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿಹ್ನೆಗೂ ಅದರ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಸಿಗುವ ಬೆಲೆಯು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಅದರದೇ ಆದ ಸ್ವಂತ ಬೆಲೆಯೂ ಇರುವಂತೆ – ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸುವ ಚಮತ್ಕಾರವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡಿರುವುದ ಭಾರತವೇ. ಈ ಕಲ್ಪನೆ ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸ್ ಮತ್ತು ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ಅಂಥವರ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನೂ ಮೀರಿದ್ದು"

– ***ಲಾಪ್ಲಾಸ್*** (1749-1827),
ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞ

ಅಧ್ಯಾಯ 12

ಅನುಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

12.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕವನ್ನು ಅಥವಾ ದತ್ತ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನೇಕ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದರ ವಿಲೋಮ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಎದುರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಗೊತ್ತಿದ್ದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಅನುಕಲನ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ

ಅನುಕಲನವನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು:

(i) ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕದ ವಿಲೋಮ; ಅಥವಾ

(ii) ಒಂದು ರೀತಿಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ

ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದು ಅನುಕಲನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ರೀತಿಯಿಂದಲೇ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಮುಂದೆ ಎರಡನೆಯ ರೀತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಈ ಎರಡು ರೀತಿಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

12.2 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $\phi(x)$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನಕಲನಾಂಕವು (xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ) $f(x)$ ಆದರೆ ಅದನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು

$$\phi(x) = \int f(x)dx$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, x^n ನ ನಿಷ್ಪನ್ನಕಲನಾಂಕ nx^{n-1} ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\int nx^{n-1}dx = x^n$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

$\frac{d}{dx}f(x)$ ನ್ನು $f'(x)$ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಆಗ

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

ಅವಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ y ಕೊಟ್ಟಾಗ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೇ ಮೊದಲನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆ ಆದರೆ ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆ ಇವರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಕೊಟ್ಟಾಗ yನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

12.3 ಅನುಕಲನದ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ

$\frac{d}{dx}\left[\phi(x)\right] = f(x)$ ಮತ್ತು c ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ

$$\frac{d}{dx}\left[\phi(x)+c\right] = \frac{d}{dx}\left[\phi(x)+0\right] \quad = f(x)$$

$\therefore \quad \int f(x)dx = \phi(x)$ ಅಥವಾ

$$\int f(x)dx = \phi(x) + c$$

(c ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ)

ಉದಾ.(1) x^2 ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕ $2x$ ಆಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \int 2xdx = x^2 + c$$

(2) $\tan x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕ xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\sec^2 x$ ಇದೆ.

$$\therefore \quad \int \sec^2 xdx = \tan x + c$$

ಈ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ cಯನ್ನು **ಅನುಕಲನದ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ** ಎನ್ನುವರು. ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲವು ಏಕೈಕವಲ್ಲ, ಬಹುವಾಗಿಲ್ಲವು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಈ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ cಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಸ್ಥಿರ cಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಪಡೆದ ಅನುಕಲಕ್ಕೆ **ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ** ಎನ್ನುವರು. $\phi(x)+c$ಗೆ **ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ** ಎನ್ನುವರು.

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಿಂದ ಅನುಕಲನ ಮಾಡಿ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅನುಕಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಈ ಎರಡು ಅನುಕಲಗಳು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಮಾತ್ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore \quad \int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x$ ಅಥವಾ $-\cot^{-1} x$

ಈಗ, $\tan^{-1} x - (-\cot^{-1} x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

= ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ.

12.4 ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ

$\int_a^b f(x)\,dx$ನ್ನು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ ಎಂದು ಮುಂದೆ ಮನಗಾಣುತ್ತೇವೆ (13.1 ನೋಡಿ). ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ, ಅನುಕಲದ ಅನ್ವಯ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನವು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ ಎಂಬ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. $[a, b]$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಇರಲಿ. $a \le x \le b$ ಈ ಅಂತರವನ್ನು n ಸಮಭಾಗವಮಾಡಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಉದ್ದ

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ ಆಗಿರುವುದು}$$

ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸ ಬಹುದು:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} h\left[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots f(a+\overline{n-1}\,h)\right]$$

ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಅನುಕಲಗಳು

ನಿಷ್ಪನ್ನಶಾಸ್ತ್ರ (ಅವಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ)ದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಅನುಕಲನದ ಮೂಲರೂಪಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ನಿಯಮಗಳಿಲ್ಲ. ನಿಷ್ಪನ್ನದ ವಿಲೋಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವ ಅನುಕಲನದ ಮೂಲರೂಪಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. **ಈ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅವಕಲಗಳಿಗೆ Cಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು**

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1) \qquad \because \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \log x\ (x > 0) \qquad \because \quad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \because \quad \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \qquad \because \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x \qquad \because \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x \qquad \because \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x \qquad \because \quad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\int \operatorname{cosec} x \cot x = -\operatorname{cosec} x \qquad \because \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \qquad \because \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$ $\because$ $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x$ $\because$ $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\int e^x \, dx = e^x$ $\because$ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a}$ $\because$ $\frac{d}{dx}\left[\frac{a^x}{\log a}\right] = a^x$

$\int \sinh x dx = \cosh x$ $\because$ $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

$\int \cosh x dx = \sinh x$ $\because$ $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

$\int \text{sech}^2 x \, dx = \tanh x$

$\int \text{cosech}^2 x \, dx = -\coth x$

$\int \text{sech} x \tanh x \, dx = -\text{sech} x$

$\int \text{cosech} x \coth x \, dx = -\text{cosech} x$

12.5 $\int dx$ ಸಂಕೇತವು ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಗಳು

1. $\frac{d}{dx}\int \phi(x)dx = \phi(x)$ ಆದರೆ

$$\left[\int \frac{d}{dx} \phi(x)\right]dx = \phi(x) + c$$

(ಅಂದರೆ, ಅನುಕಲನ ಮತ್ತು ಅವಕಲನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಬಹುದು.)

2. $\frac{d}{dx}\left[\int udx + \int vdx + \int wdx\right] = u + v + w$

$$\therefore \int udx + \int vdx + \int wdx = \int (u+v+w)dx$$

3. $\frac{du}{dx} = v$ ಆಗಿದ್ದು aಯು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ

$$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx} = av \qquad \therefore \quad au = \int av\,dx$$

ಅಥವಾ $\quad a\int v dx = \int av\,dx$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

2. $\int x^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$

3. $\int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-2} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{-2x^2} + C$

4. $\int ax\,dx = a\int x\,dx = \frac{ax^2}{2} + C$

5. $\int \frac{x}{a+x}dx = \int \frac{x+a-a}{a+x}dx = \int dx - a\int \frac{1}{x+a}dx$

$$= x - a\log(x+a) + C$$

6. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log(ax+b) + C$

7. $\int \left(5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx$

$$= 5\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \log x + 2\frac{x^{-2+1}}{-1}$$

$$= x^5 - x^4 + x^3 + \log x - \frac{2}{x} + C$$

8. $\int (x^2 - 1)(3x^3 - 2)dx$

$$= \int (3x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2)dx$$

$$= 3\int x^5 dx - 3\int x^3 dx - 2\int x^2 dx + 2\int dx$$

$$= \frac{3 \cdot x^6}{6} - \frac{3 \cdot x^4}{4} - \frac{2 \cdot x^3}{3} + 2x + C$$

$$= \frac{x^6}{2} - \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x + C$$

9. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx$

$$= \int \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$$

$$= \int x^4 dx + 2\int dx + \int x^{-4} dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2x + \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

10. $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5}{x^{1/3}} dx$

$$= \int x^{11/3} dx + 3\int x^{8/3} dx + 4\int x^{5/3} dx + \int 5x^{-1/3} dx$$

$$= \frac{3x^{14/3}}{14} + \frac{3 \cdot 3x^{11/3}}{11} + \frac{4 \cdot 3x^{8/3}}{8} + \frac{5 \cdot 3x^{2/3}}{2} + C$$

$$= \frac{3}{14} x^{14/3} + \frac{9}{11} x^{11/3} + \frac{3}{2} x^{8/3} + \frac{15}{2} x^{2/3} + C$$

11. $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1 - \sin x dx}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$

$$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \sec^2 x \, dx - \int \sec x \tan x \, dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

12. $\int ae^x dx = ae^x + C$

13. $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$

$$= \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}\, dx$$

$$= \int (\sin x + \cos x) dx$$

$$= -\cos x + \sin x + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

ಅನುಕಲಿಸಿ (xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ)

1. $x^n, a+x, a+x^2, a-x^n, a^2+x^n$

2. $\frac{a}{x}, \frac{a+x}{x}, \frac{1}{a+x}, \frac{a-x}{x}$

3. $3x^7 - 4x^6 - 5x^3 + 7$

4. $(x^3-1)^2$

5. $(1-x^2)(1-x)$

6. $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2$

7. $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$

8. $\frac{x^5+2x^4+x^3}{\sqrt{x}}$

9. $9\operatorname{cosec}^2 x - 8\operatorname{cosec} x \cot x$

10. $\frac{1}{1-\sin x}$

11. $\dfrac{1}{1-\cos x}$

12. $\dfrac{1}{1+\cos x}$

13. $\sqrt{1+\sin 2x}$

14. $\sqrt{1-\sin 2x}$

15. $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

16. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

17. $(\tan x+\cot x)^2$

12.6 ಆದೇಶಕ್ರಮದಿಂದ ಅನುಕಲನ

1. $\int (ax+b^n)dx$

$ax+b=z$ ಇರಲಿ,

xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ $adx=dz$

$$=\frac{1}{a}\int z^n dz \quad =\frac{1}{a}\frac{z^{n+1}}{n+1} \quad =\frac{(ax+b)}{a(n+1)}+C$$

2. $\int \dfrac{1}{(ax+b)^n}dx$

$ax+b=t$ ಇರಲಿ, $\therefore$ $adx=dt$

$$=\frac{1}{a}\int t^{-n}dt \qquad =\frac{1}{a}\frac{t^{-n+1}}{-n+1}$$

$$=\frac{1}{a(1-n)}(ax+b)^{-n+1}+C$$

3. $\int \dfrac{dx}{ax+b}$

$ax+b=t$ ಇರಲಿ, $\therefore$ $adx=dt$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t} \quad =\frac{1}{a}\log t \quad =\frac{1}{a}\log(ax+b)+C$$

4. $\int \frac{dx}{x+a}$

$x+a=t$ ಇರಲಿ, $\therefore \quad dx=dt$

$$=\int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log(x+a)+C$$

ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

5. $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

$$\therefore \quad \int \sin 5x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x - \cos 8x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x\, dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 8}\sin 8x + C$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C$$

6. $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx$

$$= \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$$

$$= \int \sin x\, dx - \int \cos^2 x \sin x\, dx$$

ಈಗ, $\cos x = t$ ಇರಲಿ. $\therefore \quad \sin x dx = -dt$

$$\therefore \quad \int \sin^3 x dx = -\cos x + \int t^2 dt$$

$$= -\cos x + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

ಸೂಚನೆ: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

7. $\int \frac{1}{e^{3x+b}} dx$

$3x + b = t$ ಇರಲಿ, $\therefore \; 3\,dx = dt$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{e^t} = \frac{1}{3}\int e^{-t} dt$$

$$= \frac{-e^t}{3} + C = -\frac{e^{-(3x+b)}}{3} + C$$

8. $\int \sec x \, dx$

1 ನೇ ವಿಧಾನ:

ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $(\sec x + \tan x)$ ನಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{(\sec^2 x + \sec x \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$\sec x + \tan x = t$ ಇರಲಿ, $\therefore \; (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t + C$$

$$= \log(\sec x + \tan x) + C$$

2 ನೇ ವಿಧಾನ:

$$\tan\frac{x}{2} = z \text{ ಇರಲಿ}$$

ಲಾಗರಿತಮ್ ತೆಗೆದಾಗ

$$\log\tan\frac{x}{2} = \log z$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{dz}{z}$$

ಅಂದರೆ, $\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dz}{z}$

ಅಥವಾ $\int \text{cosec}x\, dx = \log z + C = \log\tan\frac{x}{2} + C$

ಈಗ, $x = \frac{\pi}{2} + y$ ಇರಲಿ, $\therefore\ dx = dy$

$$\therefore \quad \int \cos ec\left[\frac{\pi}{2} + y\right]dy = \log\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + C$$

$$\int \sec y\, dy = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) + C$$

$$\therefore \quad \int \sec x\, dx = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

ಮತ್ತು $\int \text{cosec}x\, dx = \log\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

ಅನುಕಲಿಸಿ:

1. $(x+1)^5$
2. $\frac{1}{(x+1)^7}$
3. $\frac{1}{2x+1}$
4. $\frac{1}{(3x+1)^5}$
5. $(ax+3)^4$
6. $\sin(ax+b)$

7. $\sin(2x+1)$ 8. $\frac{1}{\sqrt{5-3x}}$ 9. $\sqrt{1+\cos x}$

10. $\sqrt{\sin^2 x}$ 11. $\cos^2 x$ 12. $\sin x\cos x$

13. $\sin^2 x\cos^2 x$ 14. $\sin^2 x$ 15. $\cos^3 x$

16. $\sin 3x\sin 2x$ 17. $\cos 3x\cos 5x$

18. $\sin 7x\cos 3x$ 19. $\tan^2 x$ 20. $\tan^4 x$

21. $\cot^2 x$ 22. $\cot^4 x$ 23. $\sec^3 x\tan x$

24. $\cos^4 x$ 25. e^{ax+b} 26. $\cos(2-3x)$

27. $\operatorname{cosec}(5x-3)\cot(5x-3)$ 28. $\sec(3x+2)\tan(3x+2)$

29. $(7-3x)^4$ 30. $\sqrt{ax+b}$ 31. $\sqrt{\tanh x}\operatorname{sech}^2 x$

32. $\coth^2 x\operatorname{cosech}^2 x$ 33. $\frac{\cosh^3 x}{\sinh^5 x}$

34. $\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{3x}}+\frac{1}{e^{5x}}$ 35. $\operatorname{cosec}^4 x$

36. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ 37. $\frac{1}{\sin^2 x}$

38. $\frac{1}{\sin^2 5x}$ 39. $\frac{1}{4x-3}$

40. $\frac{1}{\sqrt{a-x}}$ 41. $e^x+e^{-x}+e^{-2x}$

42. $\sec 2x$ 43. $\operatorname{cosec}2x$ 44. $\sin^4 x$

12.7 $\int [f(x)]^n f'(x)dx$ ಮತ್ತು $\int \frac{f'(x)dx}{[f(x)]^n}$ ರೀತಿಯ ಅನುಕಲಗಳು

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$

$\cos x = t$ ಆದರೆ, ಆಗ $-\sin x dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log t = -\log \cos x$$

$$= \log \sec x + C$$

2. $\int \frac{8x+5}{4x^2+5x+3} dx$

$4x^2+5x+3 = t$ ಆದರೆ $\therefore$ $(8x+5)dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log(4x^2+5x+3) + C$$

3. $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\sin^{-1} x = t$ ಆದರೆ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$

$$= \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x) + C$$

4. $\int \frac{e^{m \tan^{-1} x}}{(1+x^2)\left[\sqrt{3+e^{m \tan^{-1} x}}\right]^{1/2}} dx \equiv I$ ಆದರೆ.

$3 + e^{m \tan^{-1} x} = t$ ಆದರೆ, $\therefore$ $\frac{me^{m \tan^{-1} x}}{1+x^2} dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{mt^{1/2}} dt \quad = \frac{2}{m} t^{1/2} + C = \frac{2}{m}(3 + e^{m \tan^{-1} x})^{1/2} + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.3

ಈ ಅನುಕಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

1. $\int \cot x\, dx$

2. $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^3}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^5}$

4. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

5. $\int x^3 \sqrt{1-x^4}\, dx$

6. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$

7. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$

8. $\int \frac{\sec^2 x dx}{1+\tan x}$

9. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x dx}{1+\cot x}$

10. $\int \frac{\tan^{-1} x dx}{1+x^2}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x}$

12. $\int \frac{(1+\tan^{-1} x)^m dx}{1+x^2}$

13. $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$

14. $\int \frac{dx}{x \log x}$

15. $\int \frac{e^{m \sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}\,(2+e^{m \sin^{-1} x})} dx$

16. $\int \frac{x^3 dx}{4+3x^4}$

17. $\int \frac{x e^{x^2}}{\sqrt{1+e^{x^2}}} dx$

18. $\int \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$

19. $\int \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x} dx$

20. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-2\sin x}}$

21. $\int \frac{\sec^2 x dx}{(a+b\tan x)^5}$

22. $\int \frac{\sin 2x dx}{4+3\sin^2 x}$

23. $\int \frac{\sin 2x dx}{5+2\cos^2 x}$

24. $\int \frac{(a+b\log x)^m}{x} dx$

25. $\int \frac{\sqrt{3+4\tan x}}{\cos^2 x} dx$

26. $\int \frac{\sqrt{a-b\cot x}}{\sin^2 x} dx$

27. $\int \cos x e^{\sin x} \sqrt{a+be^{\sin x}} dx$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಅನುಕಲಿಸಿ:

29. $\sin ax$

30. $\sin \frac{ax}{b}$

31. $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

32. $x\sin x^2$

33. $x^2 \sin ax^3$

34. $\cos ax$

35. $\cos\frac{x}{a}$

36. $x\cos(x^2+1)$

37. $x^3\cos(1+x^3)$

38. $\sin^2 x\cos x$

39. $\cos^3 x\sin x$

40. $\sec^2 x\cos x$

41. $\tan mx$

42. $\cot ax$

43. $\sec ax$

44. $\operatorname{cosec} mx$

45. $x\tan x^2$

46. $x^2\cot x^3$

47. $(\tan x-\cot x)^2$

12.8 ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಆದೇಶಗಳು

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

$x = a\tan\theta$ ಇರಲಿ $\therefore \quad dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta} \quad = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

2. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$

$$= \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$$

$$\frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x}$$ ಇರಲಿ

$$\therefore \quad \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{A(a+x) + B(a-x)}{(a-x)(a+x)}$$

ಅಥವಾ $1 = A(a+x) + B(a-x)$

$x = a$ ಆದರೆ $1 = A(2a)$ $A = \frac{1}{2a}$

$x = -a$ ಆದರೆ $1 = B(2a)$ $B = \frac{1}{2a}$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)} = \int \frac{1}{2a(a-x)} dx + \int \frac{dx}{2a(a+x)}$$

$$= \frac{-1}{2a}\log(a-x) + \frac{1}{2a}\log(a+x)$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log(a+x) - \log(a-x)\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C$$

3. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx \int \frac{1}{(x-a)(x+a)} dx$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)}$$ ಇರಲಿ.

$$\therefore \quad \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A(x+a) + B(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

ಅಥವಾ $1 = A(x+a) + B(x-a)$

$x = a$ ಆದಾಗ $\quad A = \frac{1}{2a}$

$x = -a$ ಆದಾಗ $\quad B = -\frac{1}{2a}$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{(x-a)(x+a)} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x-a} dx - \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x+a} dx$$

$$= \frac{1}{2a} \log(x-a) - \frac{1}{2a} \log(x+a)$$

$$= \frac{1}{2a} [\log(x-a) - \log(x+a)]$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + C$$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$x = a \sin\theta$ ಇರಲಿ $\therefore \quad dx = a\cos\theta \, d\theta$

$$= \int \frac{a\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}} = \int d\theta = \theta + C$$

$$= \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

$x = a \sinh\theta$ ಇರಲಿ, $\therefore \quad dx = a\cosh\theta d\theta$

$$= \int \frac{a\cosh\theta}{a\sqrt{1+\sinh^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C = \log \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + C$$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$x = a\cosh\theta$ ಇರಲಿ, $\therefore \; dx = a\sinh\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{a\sinh\theta\, d\theta}{a\sqrt{\cosh^2\theta - 1}} = \int d\theta = \theta + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C$$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಮೂಲರೂಪದಂತೆ ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು:

1. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$
2. $\frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a + x}{a - x} + C$
3. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\log\frac{x - a}{x + a} + C$
4. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C = \log\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + C$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C$

ಸೂಚನೆ: $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$

$$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{x + 1}{x - 1}$$

7. $\int \frac{dx}{7+5x^2}$

$x\sqrt{5} = \sqrt{7}\tan\theta$ ಇರಲಿ $\quad \therefore \quad \sqrt{5}dx = \sqrt{7}\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{7}\sec^2\theta d\theta}{7+7\tan^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{35}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{35}}\theta + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{35}} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}} + C$$

8. $\int \frac{dx}{8\cos^2 x + 2\sin^2 x}$

(ಉತ್ಪನ್ನದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು $\sec^2 x$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ)

$$= \int \frac{\sec^2 x dx}{8+3\tan^2 x}$$ $\sqrt{3}\tan x = \sqrt{8}\tan\theta$ ಇರಲಿ.

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{8}\sec^2\theta d\theta}{8+8\tan^2\theta}$$ $\therefore \sqrt{3}\sec^2 x dx = \sqrt{8}\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{24}}\theta + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\tan x\right) + C$$

9. $\int \frac{dx}{8-3x^2}$

$x\sqrt{3} = \sqrt{8}\tanh\theta$ ಇರಲಿ. $\quad \therefore \quad \sqrt{3}dx = \sqrt{8}\text{sech}^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{8}\text{sech}^2\theta\, d\theta}{8-8\tanh^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{24}}\theta + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} \tanh^{-1} \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{8}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{8}}}{1 - \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{8}}} + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}} \log \frac{\sqrt{8} + x\sqrt{3}}{\sqrt{8} - x\sqrt{3}} + C$$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 3x^2}}$

$x\sqrt{3} = 2\sinh\theta$ ಇರಲಿ $\therefore$ $\sqrt{3}dx = 2\cosh\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2\cosh d\theta}{\sqrt{4 + 4\sinh^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot 2} \int \frac{\cosh\theta}{\cosh\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \theta + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh^{-1} \frac{x\sqrt{3}}{2} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \log\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{1 + \frac{3x^2}{4}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \log(x\sqrt{3} + \sqrt{4 + 3x^2}) + C$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$

$3x = 4\sin\theta$ ಇರಲಿ $\therefore$ $3dx = 4\cos\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{4\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{16 - 16\sin^2\theta}} = \frac{1}{3} \int d\theta = \frac{1}{3}\theta + C$$

$$=\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{4}+C$$

12. $$\int\frac{dx}{4-9x^2}=\int\frac{dx}{(2-3x)(2+3x)}=\int\left[\frac{A}{2-3x}+\frac{B}{2+3x}\right]dx$$

$$1=A(2+3x)+B(2-3x)$$

$3x=-2$ ಆದಾಗ, $1=4B$ $\therefore$ $B=\frac{1}{4}$

$3x=2$ ಆದಾಗ, $1=4A$ $\therefore$ $A=\frac{1}{4}$

$\therefore$ ಅನುಕಲ $=\int\frac{1}{4(2-3x)}dx+\int\frac{1}{4(2+3x)}dx$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-3}\log(2-3x)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\log(2+3x)+C$$

$$=\frac{1}{12}\log\frac{2+3x}{2-3x}+C$$

13. $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$x=a\sin\theta$ ಇರಲಿ $\therefore$ $dx=a\cos\theta\,d\theta$

$$=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=a^2\int\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int d\theta+\frac{a^2}{2}\int\cos2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

14. $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$

$x = \sinh\theta$, $\quad\therefore\quad dx = \cosh\theta\, d\theta$

$$= \int \sinh^2\theta\sqrt{1+\sinh^2\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

$$= \int \sinh^2\theta\cosh^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sinh^2 2\theta}{4}d\theta = \frac{1}{4}\int\frac{\cosh 4\theta - 1}{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int \cosh 4\theta\, d\theta - \frac{1}{8}\int d\theta = \frac{1}{32}\sinh 4\theta - \frac{1}{8}\theta + C$$

$$= \frac{1}{32}\cdot 2\sinh 2\theta\cdot\cosh 2\theta - \frac{1}{8}\sinh^{-1}x + C$$

$$= \frac{1}{16}\cdot 2\sinh\theta\cosh\theta(1+2\sinh^2\theta) - \frac{1}{8}\sinh^{-1}x + C$$

$$= \frac{1}{8}\cdot x\cdot\sqrt{1+x^2}(1+2x^2) - \frac{1}{8}\sinh^{-1}x + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.4

ಅನುಕಲಿಸಿ:

1. $\frac{1}{4+3x^2}$
2. $\frac{1}{5+9x^2}$
3. $\frac{1}{a+bx^2}$
4. $\frac{x}{4x^4+9}$
5. $\frac{\sqrt{x}}{4x^3+9}$
6. $\frac{ex}{3e^{2x}+4}$
7. $\frac{\cos x}{5\sin^2 x+9}$
8. $\frac{\sec^2 x}{7+3\tan^2 x}$
9. $\frac{\sinh x}{6+25\cosh^2 x}$
10. $\frac{1}{\sqrt{x}(9+4x)}$
11. $\frac{1}{x[9+4(\log x)^2]}$
12. $\frac{\sin x}{9+4\cos^2 x}$
13. $\frac{\sin x}{8-3\sin^2 x}$
14. $\frac{\sec^2 x}{5+4\sec^2 x}$
15. $\frac{1}{9\cos^2+4\sin^2 x}$
16. $\frac{1}{5+4\cos^2 x}$
17. $\frac{1}{3+4\sin^2 x}$
18. $\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)(9+4e^{2m\tan^{-1}x})}$
19. $\frac{1}{9-4x^2}$
20. $\frac{1}{16-25x^2}$
21. $\frac{1}{10-3x^2}$
22. $\frac{1}{7-4x^2}$
23. $\frac{x}{9-16x^4}$
24. $\frac{x^2}{25-9x^6}$
25. $\frac{\cos x}{9-4\sin^2 x}$
26. $\frac{ex}{8-3e^{2x}}$
27. $\frac{1}{x[4-\log x)^2]}$
28. $\frac{1}{\sqrt{x}[16-9x]}$
29. $\frac{\sqrt{x}}{9-4x^3}$
30. $\frac{\sin x}{12-5\cos^2 x}$
31. $\frac{1}{\sqrt{9+5x^2}}$

32. $\dfrac{1}{\sqrt{16+3x^2}}$ 33. $\dfrac{1}{\sqrt{7+4x^2}}$ 34. $\dfrac{x}{\sqrt{16+9x^4}}$

35. $\dfrac{x^2}{25+16x^6}$ 36. $\dfrac{e^x}{\sqrt{5+3e^{2x}}}$ 37. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4+5\sin^2 x}}$

38. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{9-4\cos^2 x}}$ 39. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{10-3\sin^2 x}}$ 40. $\dfrac{\cosh x}{\sqrt{4+\sinh^2 x}}$

41. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ 42. $\int\dfrac{1}{x^2-1}$ 43. $\int\dfrac{x^2}{1-x^2}dx$

44. $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$ 45. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ 46. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

47. $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ 48. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ 49. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

50. $\int\dfrac{dx}{x^2(1+x^2)}$ 51. $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-16}}$ 52. $\dfrac{x}{\sqrt{4x^4-25}}$

53. $\dfrac{x^3}{\sqrt{7x^4-9}}$ 54. $\dfrac{e^x}{\sqrt{5e^{2x}-6}}$ 55. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{9x^3-8}}$

56. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x-25}}$ 57. $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{8\tan^2 x-25}}$ 58. $\dfrac{\cosh x}{\sqrt{5-4\sinh^2 x}}$

59. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{9\sin^2 x-8}}$ 60. $\dfrac{1}{x\sqrt{4(\log x)^2-9}}$ 61. $\dfrac{1}{100+9x^2}$

62. $\dfrac{1}{100-9x^2}$ 63. $\dfrac{1}{9x^2-100}$ 64. $\dfrac{1}{\sqrt{100-9x^2}}$

65. $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-100}}$ 66. $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+100}}$ 67. $\sqrt{100-9x^2}$

68. $\sqrt{9-4x^2}$ 69. $\sqrt{3-2x^2}$ 70. $\sqrt{8-3x^2}$

71. $\sqrt{10-9x^2}$ 72. $\sqrt{18-5x^2}$ 73. $\sqrt{7-3x^2}$

74. $\sqrt{9+4x^2}$ 75. $\sqrt{9+16x^2}$ 76. $\sqrt{3+2x^2}$

77. $\sqrt{4+3x^2}$ 78. $\sqrt{6}+7x^2$ 79. $\dfrac{1}{a^2+b^2x^2}$

80. $\dfrac{1}{7x^2-8}$ 81. $\dfrac{1}{4x^2-5}$ 82. $\dfrac{1}{5-3x^2}$

83. $\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}$ 84. $\dfrac{1}{\sqrt{3+5x^2}}$ 85. $\dfrac{1}{\sqrt{5x^2-6}}$

86. $\dfrac{1}{(4+3x^2)}$ 87. $\dfrac{1}{\sqrt{8+7x^2}}$ 88. $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-8}}$

89. $\sqrt{4-x^2}$ 90. $\sqrt{4x^2+25}$ 91. $\sqrt{5x^2-6}$

12.9.1 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ ಆದೇಶ ಮಾಡುವ ಅವಕಲನಗಳು

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{4+3\cos x}\equiv I$

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\therefore\ I=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[4+3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right]}$$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}dx=dt$ ಅಥವಾ $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$= 2\int \frac{dt}{4 + 4t^2 + 3 - 3t^2} \quad = 2\int \frac{dt}{t^2 + 7}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{7}} + C \quad = \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right) + C$$

2. $\int \frac{dx}{3 + 4\sin x}$

$\tan\frac{x}{2} = t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

$$= \int \frac{2dt}{\left(3 + \frac{4 \cdot 2t}{1 + t^2}\right)(1 + t^2)} \qquad \because \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{3 + 3t^2 + 8t} = \frac{2}{3}\int \frac{2dt}{t^2 + \frac{8}{3}t + 1}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{7}}{3}} \log\left[\frac{t + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}}{t + \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \log\left[\frac{3t + 4 - \sqrt{7}}{3t + 4 + \sqrt{7}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \log\left[\frac{3\tan\frac{x}{2} + 4 - \sqrt{7}}{3\tan\frac{x}{2} + 4 + \sqrt{7}}\right] + C$$

12.9.2 $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ ಮತ್ತು $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

1. $$\int \frac{dx}{2x^2+3x+5} = \int \frac{dx}{2\left(x^2+\frac{3}{2}\cdot x+\frac{5}{2}\right)} \equiv I$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}+\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}}$$

$x+\frac{3}{4} = \sqrt{\frac{31}{16}}\tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $dx = \sqrt{\frac{31}{16}}\sec^2 d\theta$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\frac{31}{16}}\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\tan\theta\right)^2 + \frac{31}{16}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{31}{16}}}\int d\theta = \frac{4}{2\sqrt{31}}\theta + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{31}{16}}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{31}}\tan^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{31}}\right) + C$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(4x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2+4}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}$$

$x+2=3\sin\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. $\therefore\ dx=3\cos\theta\, d\theta$

$$=\int\frac{3\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{3^2-3^2\sin^2\theta}}=\int d\theta=\theta+C$$

$$=\int\sin^{-1}\frac{x+2}{3}+C$$

3. $\displaystyle\int\frac{3x+5}{x^2-6x+10}dx$

ಅಂಶ $=k\ \dfrac{d}{dx}$ (ಛೇದ) $+m$ ಇರಲಿ

$\therefore\ 3x+5=k(2x-6)+m$

ಎರಡು ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಸಹಾಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ

$2k=3 \qquad \therefore\ k=\dfrac{3}{2}$

ಈಗ, $-6k+m=5 \qquad \therefore\ -6\left(\dfrac{3}{2}\right)+m=5$

$\therefore\ m=14$

$$\therefore\ \int\frac{(3x+5)}{x^2-6x+10}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-6)+14}{x^2-6x+10}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+10}+14\int\frac{dx}{x^2-6x+10}$$

$$=\frac{3}{2}\log(x^2-6x+10)+14\int\frac{dx}{(x-3)^2+1}$$

$$=\frac{3}{2}\log(x^2-6x+10)+14\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{1}\right)+C$$

4. $\displaystyle\int\frac{\sin x+3\cos x}{3\sin x+4\cos x}dx$

ಅಂಶ $= k$ (ಛೇದ) $+ m \cdot \frac{d}{dx}$ (ಛೇದ) ಇರಲಿ.

$$\sin x + 3\cos x = k(3\sin x + 4\cos x) + m(3\cos x - 4\sin x) \quad ...(1)$$

$$\therefore \int \frac{\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x} dx$$

$$= \int \frac{k(3\sin x + 4\cos x) + m(3\cos x - 4\sin x)}{3\sin x + 4\cos x} dx$$

$$= \int k\, dx + m \int \frac{3\cos x - 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x} dx$$

$$= kx + m\log(3\sin x + 4\cos x) + C \quad ...(2)$$

ಈಗ, $\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ನ ಸಹಾಪವರ್ತನಗಳನ್ನು (1)ರ ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಹೋಲಿಸಿದರೆ

$$3k - 4m = 1 \quad , \quad 4k + 3m = 3$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$k = \frac{3}{5},\ m = \frac{1}{5}$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\therefore \int \frac{(\sin x + 3\cos x)}{3\sin x + 4\cos x} dx = \frac{3x}{5} + \frac{1}{5}\log(3\sin x + 4\cos x) + C$$

5. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx$

ಇದರಲ್ಲಿ, ಅಂಶದ ಘಾತ ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಅದರ ಘಾತ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವವರೆಗೂ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$

$$\therefore \int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx = \int x^2 dx - \int dx + 2\int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + 2\tan^{-1} x + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.5

ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕಲಿಸಿ:

1. $\frac{1}{3+2\cos x}$ 2. $\frac{1}{5+6\cos x}$ 3. $\frac{1}{8+5\cos x}$

4. $\frac{1}{5+4\sin x}$ 5. $\frac{1}{2-\cos x+3\sin x}$

6. $\frac{1}{x^2+2x+5}$ 7. $\frac{1}{x^2+4x+6}$ 8. $\frac{1}{2x^2+3x+6}$

9. $\frac{1}{x^2+3x+5}$ 10. $\frac{1}{x^2-4x-8}$ 11. $\frac{1}{3x^2+6x+8}$

12. $\frac{1}{2x^2+4x+9}$ 13. $\frac{1}{2x^2+3x+1}$ 14. $\frac{1}{\sqrt{4}-3x+x^2}$

15. $\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ 16. $\frac{1}{\sqrt{7-4x-2x^2}}$ 17. $\frac{1}{\sqrt{8-5x+x^2}}$

18. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$ 19. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ 20. $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x-6}}$

21. $\frac{1}{\sqrt{9-2x-x^2}}$ 22. $\sqrt{1+x+x^2}$ 23. $\sqrt{x^2+2x+2}$

24. $\sqrt{5+4x-x^2}$ 25. $\sqrt{7+3x-x^2}$ 26. $\sqrt{2x^2-3x+5}$

27. $\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+3\cos x}$ 28. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 29. $\frac{x^3+1}{x+1}$ 30. $\frac{x^3-1}{x^2-1}$

12.10 ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬೀಜವಾಕ್ಯಗಳ ಅನುಕಲನ

1. $\int \frac{1}{(x-2)(x-5)}\,dx$

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5}$$

$$= \frac{A(x-5)+B(x-2)}{(x-2)9x-5)}$$

$\therefore \ 1 = A(x-5) + B(x-2)$

$x = 5$ ಆದರೆ $\quad 1 = B(3) \quad B = \frac{1}{3}$

$x = 2$ ಆದರೆ $\quad 1 = A(-3) \quad A = \frac{-1}{3}$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-2)(x-5)} = -1\int \frac{dx}{3(x-2)} + \int \frac{dx}{3(x-5)}$$

$$= -\frac{1}{3}\log(x-2) + \frac{1}{3}\log(x-5) + C$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{x-5}{x-2} + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$$\frac{2x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

$\therefore \ 2x^2 + 1 = A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$

$x = -1$ ಆದಾಗ $3 = 2A \quad \therefore \ A = \frac{3}{2}$

$x = -2$ ಆದಾಗ $9 = -B \quad \therefore \ B = -9$

$x = -3$ ಆದಾಗ $19 = 2C \quad \therefore \ C = \frac{19}{2}$

$$\therefore \int \frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - 9\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{19}{2}\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log(x+1) - 9\log(x+2) + \frac{19}{2}\log(x+3) + C$$

3. $\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx$

$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$

$x = 1$ ಆದಾಗ $1 = A(2) + B + C$

$x = 0$ ಆದಾಗ $1 = A \quad \therefore \; -1 = B + C$ ...(1)

$x = -1$ ಆದಾಗ $1 = 2 - (-B + C)$

$-1 = -(-B+C) \quad \therefore \; 1 = C - B$ ...(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $C = 0$, $B = -1$ ಆಗುವುದು

$$\therefore \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$$

$x^2 + 1 = t$ ಆದರೆ $2x\,dx = dt$ ಆಗುವುದು

$$= \log x - \frac{1}{2}\log t + C$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.6

ಈ ಅನುಕಲನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$
2. $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$
3. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$
4. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2}$

5. $\int \frac{dx}{x^2-1}$

6. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

7. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

8. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)}$

12.11 ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ

ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನ ಮಾಡುವ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಅನುಕಲನವಲ್ಲಿ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಅನುಕಲನ ಮಾಡಲು ಒಂದು ನಿಯಮವಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ **ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

u ಮತ್ತು vಗಳು ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನ (xನಲ್ಲಿ)ಗಳಾದರೆ

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int vdu$$

ಅಥವಾ $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$

$\int u\,dx$ನ್ನು 1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ v'ನ್ನು 2ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆದರೆ

$\int uv'\,dx =$ (1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ)(2ನೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ)

$-\int$(2 ನೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ)(1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x \quad \sin x\ dx$

(1) (2)

$$= x(-\cos x) - \int(-\cos x)(1)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

2. $\int x^2 \cos 3x\,dx$

$$= x^2\left(\frac{\sin 3x}{3}\right) - \int \frac{\sin 3x}{3} 2x\,dx$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\int \underset{(1)}{x} \ \underset{(2)}{\sin 3x}\ dx$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\left[x\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) - \int\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right)1\,dx\right]$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} + \frac{2}{3^2}x\cos 3x - \frac{2}{9}\int \cos 3x\,dx$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} + \frac{2x\cos 3x}{9} = \frac{2}{9}\cdot\frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} + \frac{2x\cos 3x}{9} - \frac{2}{27}\sin 3x + C$$

3. $\int \sin^{-1} x dx$

$$= \int \underset{(1)}{\sin^{-1} x} \cdot \underset{(2)}{1}dx$$

$$= \sin^{-1} x \cdot x - \int \frac{x.1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$1 - x^2 = t$ ಆಗಿರಲಿ, ಆಗ $-2xdx = dt$ ಆಗುವುದು

$$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{1/2}}$$

$$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}t^{1/2}$$

$$= x\sin^{-1} x + (1-x^2)^{1/2} + C$$

4. $\int \log x\,dx$

$$= \int \underset{(1)}{\log x} \cdot \underset{(2)}{1}dx$$

$$= (\log x)x - \int x.\frac{1}{x}dx \qquad = x\log x - \int dx$$

$$= x\log x - x + C$$

5. $\int \underset{(2)}{x} \underset{(1)}{\log x}\, dx$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^4}{4} + C$$

6. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

ಇದನ್ನು I ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

$\therefore \quad I = \int \underset{(2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \underset{(1)}{1}\, dx$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x \frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{-(a^2 - x^2 - a^2)}{(a^2 - x^2)^{1/2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}} + \int \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int (a^2 - x^2)^{1/2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

i.e. $I + I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + C\right]$$

(ಸೂಚನೆ: ಇದೇ ಅನುಕಲನವನ್ನು ಒಂದೆ $x = a\sin\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ.)

7. $\int \underset{(1)}{x} \underset{(2)}{\sec^2 x}\, dx$

$$= x\tan x - \int \tan x \cdot 1\, dx$$

$$= x\tan x + \log\cos x + C$$

8. $\int x \sin 5x \cos 3x\, dx$

$$I = x\int \frac{1}{2}[\sin 8x + \sin 2x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x\sin x8x\, dx + \frac{1}{2}\int x\sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\frac{(-\cos 8x)}{8} - \int\frac{(-\cos 8x)}{8}1\, dx\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[x\frac{(-\cos 2x)}{2} - \int\frac{(-\cos 2x)}{2}1\, dx\right]$$

$$= \frac{-x\cos 8x}{16} + \frac{1}{8}\int\cos 8x dx - \frac{-x\cos 2x}{4} + \frac{1}{2}\int\cos 2x dx$$

$$= -\frac{x\cos 8x}{16} + \frac{\sin 8x}{64} - \frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

9. $\int x^2 \; e^{ax} dx$

(1) (2)

$$I = x^2 \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \int x \; e^{ax} dx$$

(1) (2)

10. $\int e^{ax} \cos bx \; dx$

(1) (2)

$$I = e^{ax} \frac{\sin bx}{b} = -\int \frac{\sin bx}{b} \cdot ae^{ax} dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b}\left[e^{ax} \left(\frac{-\cos bx}{b} \right) - \int - \frac{\cos bx}{b} ae^{ax} \; dx \right]$$

$$= \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

$$I + \frac{a^2}{b^2} I = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{ae^{ax} \cos bx}{b^2}$$

$$\therefore \quad I = \left(\frac{b^2}{b^2(a^2 + b^2)} \right) [be^{ax} \sin bx + a\, e^{ax} \cos bx] + C$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} (be^{ax} \sin bx + ae^{ax} \cos bx) + C$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

11. $\int \frac{x\sin^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$x = \sin\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. ಆಗ $dx = \cos\theta d\theta$ ಆಗುವುದು.

$$= \int \frac{\sin\theta \cdot \theta}{\cos\theta} \cos\theta \, d\theta$$

$= \int \theta \sin\theta \, d\theta$ [ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ]

$$= \theta(-\cos\theta) - \int (-\cos\theta) 1 \, d\theta$$

$$= -\theta\cos\theta + \int \cos\theta \, d\theta$$

$$= -\theta\cos\theta + \sin\theta$$

$$= -\sin^{-1} x(\sqrt{1-x^2}) + x + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + x + C$$

12. $\int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

$x = \cos\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ $\therefore$ $dx = -\sin\theta d\theta$

$$= \int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} (-\sin\theta) \, d\theta$$

$$= \int \tan^{-1} \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2\cos^2 \frac{\theta}{2}}} (-\sin\theta) \, d\theta$$

$$= \int \tan^{-1} \left(\tan\frac{\theta}{2} \right) (-\sin\theta) d\theta$$

$$= -\int \frac{\theta}{2}\sin\theta d\theta \text{ [ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ]}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\theta\cos\theta + \int \cos\theta\, d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\theta\cos\theta - \frac{\sin\theta}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}x\cos^{-1}x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{1}{2}(x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}) + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.7

ಅನುಕಲಿಸಿ:

1. $x^3 e^x$
2. $x^2 \log x$
3. $x(\log x)^2$
4. $x^n \log x$
5. $\tan^{-1} x$
6. $x\tan^{-1} x$
7. $\cot^{-1} x$
8. $\sec^{-1} x$
9. $x^2 \sin x$
10. $x\cos x\cos 2x$
11. $x^2 \sin x\cos x$
12. $x\sin x\sec^3 x$
13. $x\mathrm{cosec}^3 x$
14. $x\log(1+x)$
15. $e^{4x}\cos 5x$
16. $e^x \cos^2 x$
17. $\sinh 2x\sin 2x$
18. $\dfrac{e^{m}\tan^{-1} x}{(1+x^2)^{3/2}}$
19. $x\cos x$
20. $x\log x$
21. $e^{-ax}\cos bx$
22. $e^{ax}\sin bx$
23. $e^{m}\sin^{-1} x$
24. $\tan^{-1} x$
25. $x^2 \sin^{-1} x$
26. $x\sec^2 x$
27. $\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$
28. $\dfrac{e^{m\tan^{-1} x}}{1+x^2}$
29. $\cosh ax\sin bx$
30. $x^5 \sinh x$

ಅಧ್ಯಾಯ 13

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನ್ವಯಗಳು

13.1 ಅನುಕಲನ–ಒಂದು ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿಯಾಗಿ

$f(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸಾಂತ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=a$ ಮತ್ತು $x=b$ ಎರಡನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, $b>a$ ಇರಲಿ. $b-a$ ಅಂತರವನ್ನು n ಉಪಾಂತರಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ ಈ ಅಂತರಗಳ ಉದ್ದಗಳು

$x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots\ldots x_n-x_{n-1}$ ಆಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿ $a=x_0, b=x_n$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

$$(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+(x_3-x_2)f(x_2)$$
$$+\ldots+\ldots(x_n-x_{n-1}f(x_{n-1}).$$

ಇದನ್ನು $\sum f(x_r)\,\delta x_r$, ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ, $\delta x_r = x_{r+1}-x_r$

ಅಂತರಗಳು ಅತಿಸಣ್ಣದಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಈ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಮಿತಿಗೆ, $x=a$ಯಿಂದ $x=b$ ವರೆಗೆ, xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ **ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅಂದರೆ

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta x_r\to 0}} \sum_{r=0}^{n-1} f(x_r)\delta x_r = \int_a^b f(x)\,dx$$

ಈ ಅನುಕಲದ ಬೆಲೆಯು ಸಾಂತ. ಏಕೆಂದರೆ M ಎನ್ನುವುದು $f(x)$ನ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಆದರೆ ದತ್ತ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಈ ಮೊತ್ತವು

$$< M\left[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots.. + (b - x_{n-1})\right]$$

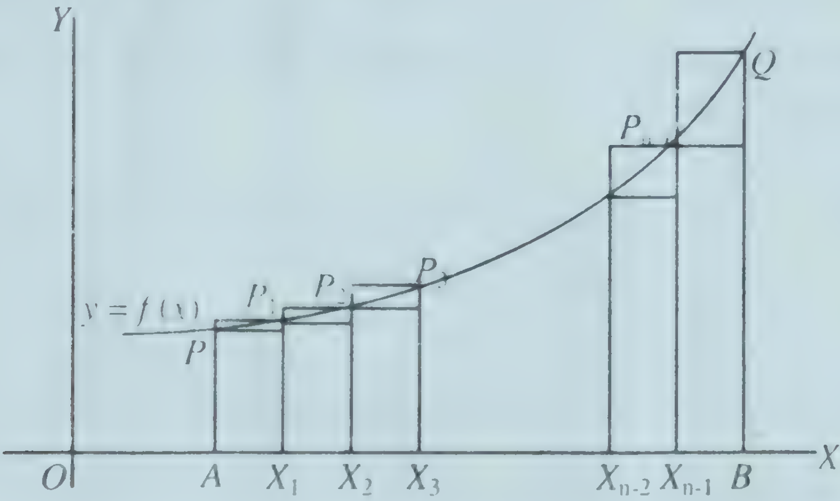
ಅಂದರೆ, ಮೊತ್ತವು $< M(b-a)$

ಇದು ಸಾಂತ ಏಕೆಂದರೆ m, b, a ಎಲ್ಲವೂ ಸಾಂತ.

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ, ಈ ಮಿತಿಯನ್ನು ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ಸರಳ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದು ಕ್ಲಿಷ್ಟಕರ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟೋ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಾಧ್ಯ ಕೂಡ ಆಗಿರುವುದು.

13.2 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ

1. ಜಾಮಿತಿಯಂತೆ:



ಚಿತ್ರ 13.1

$A, X_1, X_2 \ldots.. X_{n-1}, B$ ಗಳು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $a, x, x_2 \ldots x_{n-1}, b$ ಇರಲಿ, ಈ ಬಿಂದುಗಳ y-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $y = f(x)$ ಎನ್ನುವ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯನ್ನು $P, P_1, P_2 \ldots\ldots, P_{n-1}, Q$ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

ಆಗ AP, X_1P_1, $X_2P_2 \ldots X_{n-1}P_{n-1}$ ಗಳು

$f(a), f(x_1), f(x_2)...f(x_{n-1})$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ 13.1).

$$\therefore \ (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + ...(b - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

$$= AX_1 \cdot AP + X_1X_2 \cdot X_1P_1 + ...X_{n-1}B \cdot X_{n-1}P_{n-1}$$

$= PX_1, P_1X_2....P_{n-1}B$ ದೊಡ್ಡ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ ...(1)

ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೂ ಮತ್ತು $APQB$ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು $< PP_1, P_1P_2........P_{n-1}Q$ ಚಿಕ್ಕ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ. ಈಗ, α ಎನ್ನುವುದು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಪಾದ ಆದರೆ, ಈ ಮೊತ್ತವು $\alpha \times$ ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $< \alpha(BQ - AP)$. ಈಗ, $\alpha \to 0$ ಆದಾಗ ಇದೂ ಕೂಡ $\to 0$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ BQ, AP ಗಳು ಸಾಂತ. ಆದ್ದರಿಂದ $APQB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಎಲ್ಲ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು (1)ರ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $F'(x) = f(x)$ ಆಗಿದ್ದರೆ $APQB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು $= F(b) - F(a)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$\therefore \ (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + ... + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})$ ಎನ್ನುವುದು $F(b) - F(a)$ ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ಇಲ್ಲಿ, $F(x)$ ಎನ್ನುವುದು $f(x)$ನ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ. ಅಂದರೆ

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

2. ವಿಶ್ಲೇಷಣ ವಿಧಾನ:

$F'(x) = f(x)$ ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $F(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ $f(x)$. ನಿಷ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} = F'(x) = f(x)$$

$$\therefore \quad \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} = f(x) + \varepsilon$$

ಎಂದು ಬರೆಯುಬಹುದು. $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\varepsilon \to 0$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ

$$F(x+\delta x) - F(x) = \delta x \cdot f(x) + \varepsilon \delta x$$

$x = a$ ಮತ್ತು $\delta x = x_1 - a$ ಆದರೆ

$$F(x_1) - F(a) = (x_1 - a) f(a) + \varepsilon_1 (x_1 - a)$$

$x = x_1$ ಇದ್ದಾಗ $\delta x = x_2 - x_1$ ಆದರೆ

$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1) f(x_1) + \varepsilon_2 (x_2 - x_1)$$

$x = x_2$ ಇದ್ದಾಗ $\delta x = x_3 - x_2$ ಆದರೆ

$$F(x_3) - F(x_2) = (x_3 - x_2) f(x_2) + \varepsilon_3 (x_3 - x_2)$$

. . . .

. . . .

$x = x_{n-1}$ ಇದ್ದಾಗ $\delta x = b - x_{n-1}$ ಆದರೆ

$$F(b) - F(x_{n-1}) = (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}) + \varepsilon_n (b - x_{n-1})$$

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಕೂಡಿದರೆ

$$F(b) - F(a) = (x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots$$
$$+ \ldots (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

$$= \varepsilon_1 (x_1 - a) + \varepsilon_2 (x_2 - x_1) + \ldots \varepsilon_n (b - x_{n-1})$$
$$< \eta (x_1 - a) + \eta (x_2 - x_1) + \ldots + \eta (b - x_{n-1})$$

(η ಎನ್ನುವುದು $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_n$ ಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ)

$$= \eta (x_1 - a + x_2 - x_1 + \ldots . b - x_{n-1})$$
$$= \eta (b - a)$$

$x_1 - a, x_2 - x_1 \ldots\ldots b - x_{n-1}$ ಅಂತರಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots\ldots \varepsilon_n$ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಮತ್ತು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡವಾದ η ಕೂಡ 0 ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತವೆ.

$$\therefore \quad F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} [(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots\ldots (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})]$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$\int_a^b x^2\, dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_a^b = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3$$

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{3+7x} = \left[\frac{1}{7} \log(3+7x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{7}[\log 10 - \log 3] = \frac{1}{7} \log \frac{10}{3}$$

3. $$\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} = \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{12}$$

4. $$\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)} = \left[\frac{1}{2} \times \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} 1\right) - 0 \quad = \frac{\pi}{4} a^2$$

5. $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\, dx = [\log \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \log \sin \frac{\pi}{2} - \log \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \quad = 0 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2$$

6. $$\int_0^{\pi/b} e^{ax} \cos bx \, dx = \left[\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) \right]_0^{\pi/b}$$

$$= \frac{e^{a\pi/b}}{a^2 + b^2} (a \cos \pi + b \sin \pi) - \frac{1}{a^2 + b^2} (a)$$

$$= \frac{-a}{a^2 + b^2} \left[e^{a\pi/b} + 1 \right]$$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಕಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

1. $\int_1^4 x^4 \, dx$, $\int_2^3 x^{-2} \, dx$ $\int_4^9 x^{-1/2} \, dx$, $\int_0^9 (x^2 - x + 1) \, dx$

2. $\int_{-1}^1 (2x + 3)^2 \, dx$, $\int_{-2}^1 \frac{dx}{(x-2)^3}$, $\int_0^a (x + a)^n \, dx$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x}}$

3. $\int_1^3 \frac{dx}{x}$, $\int_0^a \frac{dx}{x - a}$, $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x + 5}$, $\int_{-1}^3 \frac{dx}{x + 1}$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$, $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{x}{2} \, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$, $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}, \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

7. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \int_0^a \sqrt{x^2+a^2}\,dx, \int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx$

8. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \int_1^3 \frac{dx}{x(2+x)}, \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+3}$

9. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{1+\cos^2\theta}, \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta, \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\, d\theta$

10. $\int_1^2 x\log x\,dx, \int_1^4 x^2\log x\,dx, \int_a^b \log x\,dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}, \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

12. $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx, \int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

13. $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx, \int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx$

14. $\int_0^1 x^2 e^x\,dx, \int_0^1 \cosh x\,dx$

15. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$

16. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$

17. $\int_0^{\pi} \cos^3\theta\, d\theta$. $\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$

18. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$. $\int_0^1 \sqrt{x^2+6x+10}\,dx$

19. $\int_0^3 \frac{x^2-9}{x^2+9}\,dx$. $\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}\,dx$

20. $\int_0^{\pi/6} \sec x\, dx$. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{cosec} x\, dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\cos x}$. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\cos x}$

22. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\, dx$. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx$

23. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)}$. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2(x+3)}$

24. $\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\, dx$. $\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos^2 x\, dx$

25. $\int_0^{\pi} \sin 4x \cos 2x\, dx$. $\int_0^{\pi/2} \sin 4x \sin 5x\, dx$

26. $\int_0^1 x\tan^{-1} x\, dx$

27. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

28. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

29. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{e^x} dx$

30. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+10}$. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+5x+6}$

13.3 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಗಳು

$F(x)$ ಎನ್ನುವುದು $f(x)$ನ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲವಾಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ $F(x) = \int f(x)dx + C$. ಆಗ

1. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ಮತ್ತು $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$

ಅಂದರೆ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲದ ಮಿತಿ a ಮತ್ತು bಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲದ ಚಿಹ್ನೆ (+ ಮತ್ತು −) ಬದಲಾಗುವುದು.

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

ಬಲಗಡೆ ಭಾಗ $= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$

$= F(b) - F(a)$ = ಎಡಭಾಗ.

3. $f(x)$ ಬೆಸ ಅಥವಾ ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ ಅಥವಾ $2\int_0^a f(x)dx$

ಮೊದಲನೆಯ ಅನುಕಲದಲ್ಲಿ $x = -t$ ಹಾಕಿದಾಗ $dx = -dt$ ಆಗುವುದು.

ಈಗ, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

$$= -\int_{-a}^{0} f(-t)dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= +\int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$\therefore \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \ldots(1)$$

1ನೇ ಸಂದರ್ಭ: $f(x)$ ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ

$$-f(x) = f(-x)$$

$$\therefore \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ಅಥವಾ $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

2ನೇ ಸಂದರ್ಭ: $f(x)$ ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ

$$f(-x) = f(x)$$

$$\therefore \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ಅಥವಾ $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

4. $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ $x = t$ ಹಾಕಿದರೆ $dx = dt$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \text{ ಎಡಭಾಗ } = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = \text{ ಬಲಭಾಗ}$$

ಅಂದರೆ, $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

5. $$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\,dx$$

$a - x = t$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $dx = -dt$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$x=a$ ಆದರೆ $t=0$ ಮತ್ತು $x=0$ ಆದರೆ $t=a$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \text{ ಬಲಭಾಗ } = \int_a^0 - f(t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx = \text{ ಎಡಭಾಗ}$$

$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

6. (i) $f(x)$ **ಸಮ** ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ

$$\int_0^{2a} (x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(ii) $f(x)$ **ಬೆಸ** ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$$

$$\text{ಈಗ } \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

2ನೆಯ ಅನುಕಲದಲ್ಲಿ $x = 2a - t$ ಹಾಕಿದರೆ $dx = -dt$ ಆಗುವುದು.

$x=a$ ಆದರೆ $t=a$. $x=2a$ ಆದರೆ $t=0$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^0 f(2a-t)(-dt)$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx - \int_a^0 f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \qquad \ldots(1)$$

1ನೇ ಸಂದರ್ಭ: $f(2a-x) = f(x)$ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ (1)ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx$$

2ನೇ ಸಂದರ್ಭ: $f(2a-x) = -f(x)$ ಇದ್ದರೆ ಆಗ (1)ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a -f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= 0$$

$\therefore \int_0^{2a} f(x) = 2\int_0^a f(x)\,dx.$ $f(2a-x) = f(x)$ ಆದಾಗ

ಮತ್ತು $\int_0^{2a} f(x) = 0$, $f(2a-x) = -f(x)$ ಆದಾಗ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (i) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ ಕಾರಣ, $\sin(\pi - x) = \sin x$

   (ii) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$ ಕಾರಣ, $\cos(\pi - x) = -\cos x$

2. $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx \equiv I$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\text{i.e.}\quad I = \int_0^{\pi} x \sin x\, dx \qquad \ldots(1)$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(\pi - x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x\, dx \qquad \ldots(2)$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$2I = \int_0^{\pi} \pi \sin x\, dx$$

$$= \pi(-\cos x)_0^{\pi} = \pi(1+1)$$

ಅಥವಾ $2I = 2\pi \quad \therefore \quad I = \pi$

3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\, dx}{\sqrt{\sin} + \sqrt{\cos x}}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \qquad \ldots(1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \qquad \ldots(2)$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$$

4. $\int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx \equiv I$ ...(1)

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/2} \log \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx \qquad ...(2)$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\log \tan x + \log \cot x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\tan x \cot x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log 1 dx = 0$$

i.e.. $2I = 0 \quad \therefore \quad I = 0$

5. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)}$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ. ಆಗ, $dx = \sec^2 \theta d\theta$ ಆಗುವುದು.

$x \to \infty$ ಆದಾಗ $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ ಆದಾಗ $\theta = 0$ ಆಗುವುದು.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan\theta \sec^2\theta d\theta}{(1+\tan\theta)\sec^2\theta}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \qquad ...(1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} d\theta \qquad ...(2)$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $\int_0^{\pi} x \tan^2 x = -\frac{\pi^2}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) = \frac{\pi}{8} \log 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x - \cos x)}{1 + \sin x \cos x} dx = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

7. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

8. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan x} dx$

9. $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x + 4\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

10. $\int_0^1 \log \frac{1 + x}{1 + x^2} dx$

11. $\int_0^a x\sqrt{a - x} dx$

12. $\int_0^\pi x \cos^2 x dx$

13. $\int_0^\pi x \tan^2 x dx$

14. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cot x}{1 + \cot x} dx$

15. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

16. $\int_0^{\pi/2} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

17. $\int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

18. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$

19. $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

20. $\int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin x} dx$

21. $\int_0^1 x(1 - x)^n dx$

13.4 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲದ ಅನ್ವಯ

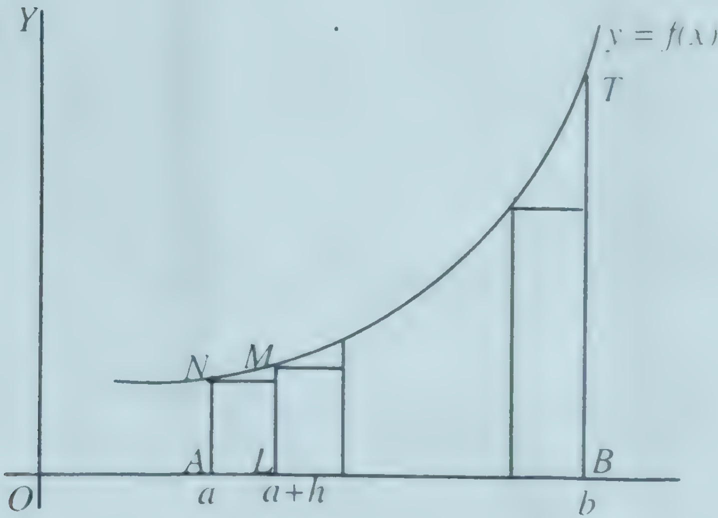
ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ ಒಂದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಂತೆ:

$y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆ ಗಮನಿಸಿ, $f(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಧನ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಿವರಣೆಯ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಭಾವಿಸೋಣ. A ಮತ್ತು Bಗಳು ನಕ್ಷೆಯ (ಚಿತ್ರ 13.2) ಬಿಂದುಗಳು ಆಗಿವೆ. A ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಕ a ಮತ್ತು B ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಕ b ಆಗಿವೆ. AN ಮತ್ತು BTಗಳು ಬಿಂದುಗಳ yನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ABಯನ್ನು nಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿದೆ; ಪ್ರತಿಭಾಗದ ಉದ್ದ $h = \frac{b-a}{n}$ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿವೆ.

$$AN = f(a),\ AL = h$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $hf(a)$ ಎನ್ನುವುದು $ALMN$ ಆಯತದಸಲೆ. $hf(a+h)$ ಅದರ ಪಕ್ಕದ ಆಯತ ಸಲೆ, $hf(a+2h)$ ಅದರ ಪಕ್ಕದ ಆಯತ ಸಲೆ, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಆಯತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾದ ಹಾಗೆಲ್ಲಾ ಅಗಲ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $ABTN$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು



ಚಿತ್ರ 13.2

$$\lim_{n\to\infty}\left[hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) + \dots\dots\dots + hf(a+\overline{n-1}\,h)\right]$$

ಆಗುವುದು.

$ABTN$ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \lim_{n \to \infty} h\left[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots f(a+\overline{n-1}h)\right]$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$ (ಮೂಲಪ್ರಮೇಯದಿಂದ).

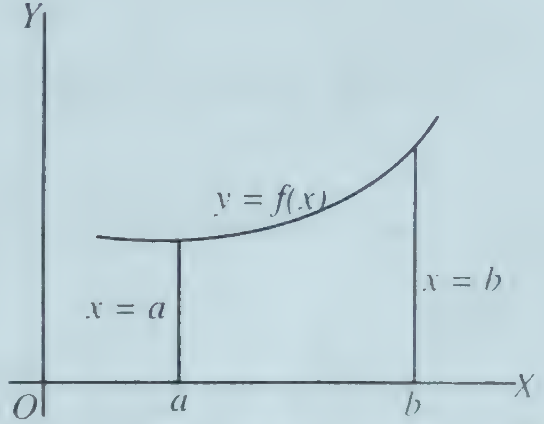
ಆದ್ದರಿಂದ $y = f(x)$ ವಕ್ರರೇಖೆ, x-ಅಕ್ಷ ಹಾಗೂ $x = a$, $x = b$ ಸಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಚಿತ್ರ 13.3):

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \int_a^b f(x)\,dx$

$= \int_a^b y\,dx$

[ಕಾರಣ $y = f(x)$]

$\therefore$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \int_a^b ydx$



ಚಿತ್ರ 13.3

ಸೂಚನೆ: ಇದೇ ರೀತಿ $x = f(y)$ ವಕ್ರರೇಖೆ $y = a$, $y = b$ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು y-ಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $A = \int_a^b xdy$ ಆಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $y = 1 - x^2$ ನಕ್ಷೆಯ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   ಈ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯು $x = 1$, $x = -1$ ಸಲ್ಲಿ x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

   $$\therefore \quad A = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx \quad = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

   $$= [1 - (-1)] - \frac{1}{3}[1^3 - (-1)^3] = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$ ಚ. ಮೂ. ಮಾ.

2. $y = x^2 + x + 2$ ನಕ್ಷೆಯ ಕೆಳಗೆ $x = -1$ ರಿಂದ $x = 2$ ವರೆಗೆ ಇರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 + x + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right)$$

$= \dfrac{21}{2}$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ.

3. $y = \cot x$ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ $x = \dfrac{\pi}{4}$ ನಿಂದ $x = \dfrac{\pi}{2}$ ವರೆಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

$$A = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\, dx \quad = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= [\log \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} \quad = \left[\log \sin \frac{\pi}{2} - \log \sin \frac{\pi}{4} \right] \quad = \frac{1}{2} \log 2$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಲಿಪ್ಸ್ ಮತ್ತು $x = c,\ x = d$ ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$A = \int_{c}^{d} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_{c}^{d}$$

$$= \frac{b}{2a} \left[d\sqrt{a^2 - d^2} - c\sqrt{a^2 - c^2} + a^2 \left(\sin^{-1} \frac{d}{a} - \sin^{-1} \frac{c}{a} \right) \right]$$

ಎಲಿಪ್ಸ್‌ನ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗ ಬರಲು $d = a, c = 0$ ಹಾಕಬೇಕು. ಆಗ

$$A = \frac{b}{2a}\left[a\sqrt{a^2 - a^2} - 0\sqrt{a^2 - 0} + a^2\left(\sin^{-1}\frac{a}{a} - \sin^{-1}\frac{0}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{b}{2a}\left(a^2 \sin^{-1} 1\right) = \frac{ba}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}$$

ಪೂರ್ಣ ಎಲಿಪ್ಸ್‌ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4 \cdot \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$

5. x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $y^2 = 2ax - x^2$ ಮತ್ತು $y^2 = ax$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಪ್ಯಾರಬೊಲಾಗಳು (0, 0) ಮತ್ತು (a, a) ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನುಕಲದ ಮಿತಿಗಳು $x = 0$ ಮತ್ತು $x = a$.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $A = \int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\,dx - \int_0^a \sqrt{ax}\,dx$

ಈಗ, ಮೊದಲನೇ ಅನುಕಲದಲ್ಲಿ

$x = a(1 - \cos\theta)$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

ಎರಡನೇ ಅನುಕಲ

$$\int_0^a \sqrt{ax}\,dx = \sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2}{3}a^2$$

$$\therefore\ A = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2a^2}{3} = a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

6. **ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ತ್ರಿಜ್ಯ a)**

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x^2 + y^2 = a^2$ ಎಂದು ಬರೆಯ ಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$A = \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}$$

$$= 2\left[\left(0 + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{a^2}{2}\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{a^2\pi}{2}\right) = \pi a^2 \text{ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ}$$

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi a^2$

7. $y = 4x - x^2 - 3$ ವಕ್ರರೇಖೆ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = 4x - x^2 - 3$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y = 0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$4x - x^2 - 3 = 0$$

ಅಥವಾ $x^2 - 4x + 3 = 0$

ಅಥವಾ $(x-3)(x-1) = 0$

ಅಥವಾ $x = 1,\ x = 3$.

ಅಂದರೆ ವಕ್ರರೇಖೆಯು (1, 0), (3, 0) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

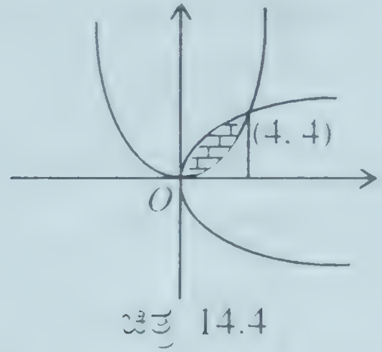
$$A=\int_1^3 (4x-x^2-3)dx \quad =\left[4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^3$$

$$=(18-9-9)-\left(2-\frac{1}{3}-3\right) \ =\frac{4}{3}$$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ

8. $y^2=4x$ ಮತ್ತು $x^2=4y$. ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y^2=4x,\ x^2=4y$ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ $x=4,\ y=4$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $A_1=\int_0^4 2\sqrt{x}dx$



ಚಿತ್ರ 14.4

$$=\left[2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4$$

$$=\frac{4}{3}(4)^{3/2}=\frac{4}{3}\cdot 8=\frac{32}{3}$$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ

$$A_2=\int_0^4\frac{x^2}{4}-dx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{1}{12}(64-0)=\frac{16}{3}$$

ಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=A_1-A_2$

$$=\frac{32}{3}-\frac{16}{3} \ =\frac{16}{3}$$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 13.3

1. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ 1ರಿಂದ 2ರವರೆಗೆ ಇರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x=0$ ಯಿಂದ $x=1$ ವರೆಗೆ $y=x-x^3$ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $y=x^2, y=0$ ಮತ್ತು $x=3$ ಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

4. $y=x^3, x=0$ ಮತ್ತು $y=8$ ಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

5. $x^2y=x^2+5$ ರೇಖೆ x-ಅಕ್ಷ, $x=1$ ಮತ್ತು $x=3$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

6. x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $y^2=4-x^2$ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

7. $y=x^2+1, y=2x+1$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

8. $y=\cos x$ ಮತ್ತು $y=\sin x$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ $x=0$ ಯಿಂದ $x=\frac{\pi}{4}$ ವರೆಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

9. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗಳು, x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $y^2=4ax(a>0)\ x=4,\ x=9$

(ii) $y=2\cos x-\sin x=0, x=\frac{\pi}{4}$

(iii) $y=e^{x/a}+e^{-x/a},\ x=\pm a$

(iv) $xy=1,\ x=1,\ x=2$

(v) $y=x^2-5x+6,\ x=2,\ x=6$

(vi) $y=\frac{x^2}{x^2+1},\ x=0, x=1$

10. $y\sqrt{25-x^2}=12$ ರೇಖೆ ಮತ್ತು $\left(0,\frac{15}{2}\right)$ ಮತ್ತು $(4,4)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಜ್ಯಾ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

11. $y(x^2+2)=18$ ಮತ್ತು $y(x+5)=9$ ಈ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $y(x^2+4)-8=0$ ಮತ್ತು $3x^2-4y-8=0$ ಈ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

13. $x^2=4ay+4a^2$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ ಮತ್ತು $3x+4y=0$ ಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

14. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳು, x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಭುಜಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $y=c\cosh\frac{x}{c}$ $\quad x=0,\ x=h$

(ii) $y=e^x$ $\quad x=0,\ x=h$

(iii) $y=\log x$ $\quad x=a,\ x=b$

(iv) $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad x=\sqrt{a^2-b^2},\ x=a$

15. $y=8-x^2$ ಮತ್ತು $y=x^2$ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $y=\sin 2x\cos 2x$ ರೇಖೆ, x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

18. $y=2x(3-x)$ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನ ಹಿ ಶ್ರುತಿಶತಮಪಿ 'ಶೀತೋಽಗ್ನಿಃ ಅಪ್ರಕಾಶೋ
ವಾ' ಇತಿ ಬ್ರುವತ್ ಪ್ರಾಮಾಣ್ಯಮುಪೈತಿ
– "ನೂರು ಶ್ರುತಿಗಳೂ (ವೇದೋಪನಿಷತ್ತುಗಳು)
'ಬೆಂಕಿಯು ತಣ್ಣಗಿದೆ ಎಂದಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಪ್ರಕಾಶಮಾನವಾಗಿಲ್ಲ
ಎಂದಾಗಲೀ' ಹೇಳಿದರೆ ಅವು ಪ್ರಾಮಾಣ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ."
– ಆದಿ ಶಂಕರಾಚಾರ್ಯರು
(ಭಗವದ್ಗೀತಾ ಭಾಷ್ಯ, ಅ.೧೮, ಶ್ಲೋ.೬೬)

ಅಧ್ಯಾಯ 14

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

14.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನೂ x, y ಇತ್ಯಾದಿ ಚರಗಳನ್ನೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಕಲ್ಪಿಸುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ **ಅವಕಲಿತ (ಅಥವಾ ಅವಕಲನ) ಸಮೀಕರಣ** ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಈ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕಗಳಲ್ಲಿಲ್ಲ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ದರ್ಜೆಯ ಸಹಾಂಕದ ದರ್ಜೆ ಯಾವುದಿದೆಯೋ ಅದಕ್ಕೆ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ **ದರ್ಜೆ (ಆರ್ಡರ್)** ಎನ್ನುವರು.

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಇದೆಯೋ ಆ ಘಾತವನ್ನು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ **ಪ್ರಮಾಣ (ಮಟ್ಟ, ಡಿಗ್ರಿ)** ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\frac{d^4 y}{dx^4} + 4\frac{d^3 y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3y = 0$

   ದರ್ಜೆ (ಆರ್ಡರ್) = 4

   ಮಟ್ಟ (ಡಿಗ್ರಿ) = 1

2. $3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 9x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

   ದರ್ಜೆ = 2, ಮಟ್ಟ = 1

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಪ್ರಾಣಿಶಾಸ್ತ್ರ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಅನೇಕ ಪರಿಮಾಣ ಸಂಬಂಧಿ ಕಲ್ಪನೆಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಲಭ್ಯವಿರುತ್ತವೆ. ಇವು ಅನೇಕ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಗುಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಬೇಕು. ಆಗ ಬರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವು ಸ್ಥಿರಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ (ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ) ಗುಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು.

14.2 ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರಚನೆ

ಉದಾಹರಣೆ: $y = mx + c$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಸಮೀಕರಣ.

ಇದನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದರೆ $\frac{dy}{dx} = m$ ...(1)

ಮತ್ತೊಂದು ಸಲ ಅವಕಲಿಸಿದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ...(2)

ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಅವಕಲನದಿಂದ c ಎಂಬ ಸ್ಥಿರವು ವಿಲೋಪ ವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ cನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆ ಇದ್ದರೂ, ಸತ್ಯವಾಗುವ (1)ನೇ ಸಮೀಕರಣ ಒದಗಿದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು cನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಗುಣ ಯಾವುದೆಂದರೆ, ಆ ರೇಖೆಗಳ ಓಟವು m ಆಗಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಅವಕಲನದಿಂದ c ಮತ್ತು m ಎರಡು ಸ್ಥಿರಗಳೂ ವಿಲೋಪ ವಾಗಿವೆ. ಈಗ ಬಂದಿರುವ 2ನೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ಎನ್ನುವುದು m ಮತ್ತು cಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಈ ರೇಖೆಗಳ ವಕ್ರತೆ (ಕರ್ವೇಚರ್) ಶೂನ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ಎನ್ನುವುದು ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದಾಯಿತು. ಈ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ (ಸೊಲ್ಯೂಷನ್) $y = mx + c$ ಆಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ, m ಮತ್ತು cಗಳು ಇಚ್ಛಾನುಸಾರ (ಆರ್ಬಿಟ್ರರಿ) ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಸ್ಥಿರಗಳು.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ, ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸ್ಥಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟೇ ದರ್ಜೆ ಇರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಿಲೋಪನದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾ: $y = mx + c$ಯಲ್ಲಿ 2 ಸ್ಥಿರಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು (2)ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ದರ್ಜೆಯೂ 2 ಆಗಿದೆ.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1. ತಂಪು ಮಾಡುವ ಬಗ್ಗೆ ನ್ಯೂಟನ್ನಿನ ನಿಯಮ

ಒಂದು ಉಷ್ಣ ವಸ್ತುವು ತಂಪಾಗುವ ದರವು ವಸ್ತುವಿನ ಮತ್ತು ಪರಿಸರದ ಉಷ್ಣತೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_0)$$

2. ಸರಳ ಸಂಗತ ಚಲನೆ (ಸಿಂಪಲ್ ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಮೋಶನ್)

(ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದೆ.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

I. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

1. $y^2 = 4ax$

$$\therefore \quad 2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

ಅಥವಾ $2y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$$\therefore \quad 2x\frac{dy}{dx} = y$$

2. $xy = c^2$

$$\therefore \quad x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

3. $x^2 + y^2 = a^2$

$$\therefore \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $x + y\frac{dy}{dx} = 0$

4. $x^2 + y^2 - ax = 0$

$$\therefore \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} - a = 0$$

ಅಥವಾ $2x + 2y\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 + y^2}{x} = 0$

5. $y = ae^{nx} + be^{-nx}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = ane^{nx} - bne^{-nx}$$

ಅಥವಾ $\frac{d^2y}{dx^2} = an^2e^{nx} + bn^2e^{-nx}$

$$= n^2(ae^{nx} + be^{-nx})$$

ಅಥವಾ $\frac{d^2y}{dx^2} = n^2y$

6. $x^2 - y^2 = a^2$

$$\therefore \quad 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $\quad x - y\frac{dy}{dx} = 0$

7. $x^2 = 4by$

$$\therefore \quad 2x = 4b\frac{dy}{dx}$$

ಅಥವಾ $\quad x = 2b\frac{dy}{dx} \qquad ...(1)$

ಈಗ (1)ರಲ್ಲಿ $b = \frac{x^2}{4y}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$x = \frac{2x^2}{4y}\frac{dy}{dx} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = \frac{x^2}{2y}\frac{dy}{dx}$$

ಅಥವಾ $\quad x\frac{dy}{dx} = 2y$

8. $x^2 + y^2 - ay = 0$

$$\therefore \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} - a\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $\quad 2x + \frac{dy}{dx}(2y - a) = 0$

ಅಥವಾ $\quad 2xy + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$

9. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\therefore \quad bx + ay = ab$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$b + a\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$ $\therefore$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

10. $y = cx + c^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = c$

ಅಥವಾ $y = \frac{dy}{dx}x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

II. ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{xd^3y}{dx^3} + \frac{3dy}{dx} + 4y = 0$: ದರ್ಜೆ 3, ಪ್ರಮಾಣ 1

(ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2xy\frac{dy}{dx} + y = 0$: ದರ್ಜೆ 2, ಪ್ರಮಾಣ 1

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$: ದರ್ಜೆ 2, ಪ್ರಮಾಣ 1

(iv) $\frac{d^3y}{dx^3} + y\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^2 = 0$: ದರ್ಜೆ 3, ಪ್ರಮಾಣ 1

(v) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = a$: ದರ್ಜೆ 1, ಪ್ರಮಾಣ 2

(vi) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y\frac{dy}{dx} = 0$: ದರ್ಜೆ 2, ಪ್ರಮಾಣ 2

(vii) $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)^r + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{dy}{dx} = a$: ದರ್ಜೆ n, ಪ್ರಮಾಣ r

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪಿಸಿ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $xy = c^2$ ನಲ್ಲಿ cಯನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

2. $y = mx + \frac{a}{m}$ ನಲ್ಲಿ mನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

3. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ಇದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ p ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವು α.

   (i) α ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

   (ii) p ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

   (iii) α ಮತ್ತು p ಎರಡನ್ನೂ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

4. $y = Ae^{bx}$ ನಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು b ಎರಡನ್ನೂ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ

5. $y = Ax^2 + Bx + C$ ಇಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನೂ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

6. $y = A\cos mx + B\sin mx$ ನಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನೂ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

7. $y = A\sin^{-1}x + B$ ನಲ್ಲಿ A, B ಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

8. $y = A\log x + B$ ಇದರಿಂದ ಬರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವು

   $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

9. $Ax + B = xy$ ಇದರ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $Ax^2 + By^2 = 1$ ಇದರ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14.3 ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ

ಚರಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳಿಲ್ಲದೆಯೇ ತಿಳಿಸುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಅವಕಲನ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಈ ಸಮೀಕರಣವು, ಇದರಿಂದ ಹೊಂದುವ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿ (ಸಮಾಧಾನ) ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಚರಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ **ಪರಿಹಾರ** ಅಥವಾ **ಅನುಕಲ** (ಇಂಟೆಗ್ರಲ್) ಎನ್ನಬಹುದು. ಉದಹಾರಣೆಗೆ $y = A\cos x + B\sin x$, ಎಂಬುದು x, y ಚರಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ.

ಇದರಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ ಇತ್ಯಾದಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು ಕಾಣಬರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ $y = A\cos x + B\sin x$ ...(1)

ಎನ್ನುವುದು $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. (1)ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = -A\sin x + B\cos x$$

ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B\sin x = -(A\cos x + B\sin x)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ (1)ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = -A\cos x - B\sin x + A\cos x + B\sin x = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$y = A\cos x + B\sin x$$

ಎನ್ನುವುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎಂದಾಯಿತು.

(2) $y = A\cos x + \sin x$ ಎನ್ನುವುದು

$\cos x\frac{dy}{dx} + y\sin x = 1$ ರ ಪರಿಹಾರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y = A\cos x + \sin x \qquad ...(1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -A\sin x + \cos x \qquad ...(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ y, $\frac{dy}{dx}$ ಗಳಿಗೆ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\cos x\frac{dy}{dx} + y\sin x$$

$$= \cos x(-A\sin x + \cos x) + (A\cos x + \sin x)\sin x$$

$$= -A\cos x\sin x + \cos^2 x + A\cos x\sin x + \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\therefore \quad y = A\cos x + \sin x$$

ಎನ್ನುವುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ.

(3) $Ax^2 + By^2 = 1 \qquad ...(1)$

ಎನ್ನುವುದು $x\left[y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dx}{dx}\right)^2\right] - y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ...(2)$

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, (1)ನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$2Ax + 2By\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ ಅಥವಾ $Ax + By\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ...(3)$

ಮತ್ತು $A + B\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

ಅಥವಾ $A + B\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0 \qquad ...(4)$

ಈಗ, (3) ಮತ್ತು (4)ರಿಂದ A, B ಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡೋಣ.
ಸಮೀಕರಣ (4)ನ್ನು xನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$Ax + Bx\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (3)

$$Ax + By\frac{dy}{dx} = 0$$

ಕಳೆದರೆ ಸ್ಥಿರಾಂಕ A ವಿಲೋಪನಗೊಂಡು

$$B\left[x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು B ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $$x\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right] - y\frac{dy}{dx} = 0$$

ಎಂಬ ದತ್ತ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

ಎನ್ನುವುದು ದತ್ತ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ.

ಸೂಚನೆ: ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿದರೆ, ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \qquad \ldots(1)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ h ಮತ್ತು k ಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, (1)ನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$2(x-h)+2(y-k)\frac{dy}{dx}=0 \text{ ಅಥವಾ } (x-h)+(y-k)\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots(2)$$

$$\therefore \ (x-h)=-(y-k)\frac{dy}{dx}$$

ಇದನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ

$$(y-k)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-k)^2=a^2 \qquad \ldots(3)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈಗ, (2)ನ್ನು ಪುನಃ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$1+(y-k)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

ಅಥವಾ
$$(y-k)=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad \ldots(4)$$

ಫಲಿತಾಂಶ (4)ನ್ನು (3)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=a^2$$

ಅಥವಾ
$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=a^2$$

ಅಥವಾ $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

ಇದು $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗುಳ್ಳ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.2

1. $xy = ce^x + be^{-x} + x^2$ನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $y = Ae^x + Be^x + Ce^{5x}$ನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $y^2 = 4a(x+a)$ನಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂಚನೆ: $f(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$ ಇದನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು n ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದಕ್ಕೆ $n+1$ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅಗತ್ಯ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು n ಸಲ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರಕುವ n ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಟ್ಟು $(n+1)$ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಅನುಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೂ ಅನುಕಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಪರಿಹಾರದ ವಿಧಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು, ''ಚರಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಬಹುದಾದ'' ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಸಪರೇಶನ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯಬಲ್ಸ್).

14.4 ಚರಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದಾದ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ dx ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ x ನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡ ಉತ್ಪನ್ನವೂ, dy ಸ ಸಹಾಪವರ್ತನ y ನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡ ಉತ್ಪನ್ನವೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$f(x)dx + \phi(y)dy = 0 \qquad ...(1)$$

ಈ ರೀತಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು, ಚರಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದಾದ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಇದರ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$$f(x)dx = -\phi(y)dy$$

ಎಂದು ಬರೆದು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಅನುಕಲಿಸಬೇಕು. ಆನಂತರ ಎರಡು ಅನುಕಲಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು:

$$\int f(x)dx + \int \phi(y)dy = c \qquad ...(2)$$

ಸಮೀಕರಣ (2) ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಪರಿಹಾರ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 = 1$ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು $x\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{x}$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅನುಕಲಿಸಿದರೆ

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

ಅಥವಾ $\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = \log x + \log C$

ಅಥವಾ $\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{1/2} = \log Cx$

ಅಥವಾ $\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{1/2} = Cx$ ಅಥವಾ $\frac{1+y}{1-y} = Cx^2$

ಇದು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ.

2. ಯಾವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪ್ರಮಾಣ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಯಾವುದೆ ಬಿಂದು (x, y) ನಲ್ಲಿ

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $ST = y\cot\psi = \dfrac{y}{\frac{dy}{dx}}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಷರತ್ತಿನ ಪ್ರಕಾರ $ST \propto x$

i.e. $\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}} = nx$

ಇದನ್ನು ಚರಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ ಅನುಕಲಿಸಿದಾಗ

$$\int \frac{n}{y}dy = \int \frac{dx}{x}$$

ಅಂದರೆ $n\log y = \log x + \log C$ ಅಥವಾ $y^n = Cx$

ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು x-ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಪರಿಹರಿಸಿ:

3. $\sec y = \sec x \dfrac{dy}{dx}$ ...(1)

ಈಗ, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sec x} = \int \frac{dy}{\sec y}$ ಅಥವಾ $\int \cos x\,dx = \int \cos y\,dy$

$\therefore \quad \sin x = \sin y + C$ ಎಂಬುದು (1)ರ ಪರಿಹಾರ

4. $\dfrac{x^2+1}{y+1} = xy\dfrac{dy}{dx}$

$\therefore \quad \dfrac{x^2+1}{x}dx = y(y+1)dy$

ಅಥವಾ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int y(y+1)\,dy$

ಅಥವಾ $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\int(y^2+y)dy$

ಅಂದರೆ $\frac{x^2}{2}+\log x=\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+C$

ಇದು ದತ್ತ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ.

5. $x\cos^2 y\,dx=y\cos^2 x\,dy$ ...(1)

$\therefore$ $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{y}{\cos^2 y}dy$

ಅಥವಾ $\int x\sec^2 x\,dx=\int y\sec^2 y\,dy$

ಅಥವಾ $x\cdot\tan x-\int\tan x\cdot 1dx=y\tan y-\int\tan y\,dy$

ಅಥವಾ $x\tan x+\log\cos x=y\tan y+\log\cos y+C$

ಇದು (1)ರ ಪರಿಹಾರ.

ಅಭ್ಯಾಸ 14.3

ಈ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

1. $xdx+ydy=0$
2. $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$
3. $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$
4. $xdx-ydy=0$
5. $\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}=0$
6. $\frac{mdx}{x^{m+1}}+\frac{ndy}{y^{n+1}}=0$
7. $(2x+3)dx+(3+2y)dy=0$
8. $(y^2+1)dy-(x^2+1)dx=0$
9. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+x+1}{y^2+y+1}$
10. $(1+e^x)dy+(1+e^y)dx=0$
11. $\sec^2 x\,dx+\sec^2 y\,dy=0$
12. $\sqrt{1-x^2}\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$

13. $\sqrt{1-x^2}dx + \sqrt{1-y^2}dy = 0$

14. $e^y(1+e^x)dx + e^x(1+e^y)dy = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^2-1}$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \cot x \cot y$

17. $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1+x^2}} = 0$

18. $y - x\dfrac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \dfrac{dy}{dx}\right)$

19. $3e^x \tan y dx + (1-e^x)\sec^2 y dy = 0$

20. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

21. $y(1+x)dx + x(1+y)dy = 0$

22. $y\sqrt{1+x^2}dx + x\sqrt{1+y^2}dy = 0$

23. $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}dx + xydy = 0$

24. $y - xy^2 = a\left[y^2 + \dfrac{dy}{dx}\right]$

25. $\operatorname{cosec} x \log y dy + x^2y^2dx = 0$

26. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x + x\cos x}{y(2\log y + 1)}$

27. $x^{-1}\cos^2 y dy + y^{-1}\cos^2 x dx = 0$

28. $\cos y \log(\sec x + \tan x)dx = \cos x \log(\operatorname{cosec} y + \tan y)dy$

29. $x\sqrt{y}dx + (1+y\sqrt{1+x}dy = 0$

30. $(e^x+1)ydy = (y+1)e^x dx$

"ನ್ಯೂಟನ್ ಮತ್ತು ಡಾರ್ವಿನ್ ಅವರನ್ನು ಪಡೆದ
ದೇಶಕ್ಕಿಂತ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ ಮತ್ತು ಶಂಕರಾಚಾರ್ಯರಿಗೆ
ಜನ್ಮವಿತ್ತ ಭಾರತವರ್ಷ ಯಾವ ವಿಧದಲ್ಲಿ ತಾನೇ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ"

– ಭಗಿನೀ ನಿವೇದಿತಾ

ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1

1. (210, 55) = 5, 5 = (5)210 + (−19)55
2. (963, 657) = 9, 9 = (−15)963 + (22) 657
3. (506, 1155) = 11, 11 = (16)506 + (−7)1155
4. (352, 891) = 11, 11 = (38)352 + (−5)891
6. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಇಲ್ಲ
7. (i) 11, 2047 (ii) 18, 5642, (iii) 18, 10374 (iv) 36
8. (a) 0, (b) 10, (c) 6, (d) 2, (e) ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.
9. (i) 61, (ii) 1, (iii) 1, (iv) 1, (v) 3.
10. (a) 1, (b) 7, (c) 3, (d) 1.

ಅಭ್ಯಾಸ 2

I (1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 23 & 11 & 13 \\ 14 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 42 & 9 & 2 \\ 65 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$

(5) $x = 0$, $y = 1$ (15) $x = 0, -2$ (16) $x = 0, -3a$

II

(1) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -9 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 9 & -11 & 6 \\ 23 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 10 & -8 & -14 \\ 2 & 2 & -10 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

III (1) $-\frac{1}{29}\begin{bmatrix} -11 & -9 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 10 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ (2) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ (4) $\frac{1}{39}\begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 23 & -11 \\ 8 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

(5) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -8 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

IV (1) $x = 1, y = 2, z = 3$ (2) $x = 1, y = 3, z = -1$
(3) $x = 1, y = 1, z = 1$ (4) $x = 1, y = 1, z = 1$

V (1) $x = 1, y = -2, z = 1$ (2) $x = -\frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$
(3) $x = 5, y = -\frac{9}{7}, z = \frac{2}{7}$ (4) $x = -1, y = -2, z = 3$

VI (1) 0, 3, 15 (2) 2, 1, 3

VII (1) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -12 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3

1. (i) ಹೌದು, (ii) ಹೌದು, (iii) ಅಲ್ಲ, (iv) ಹೌದು, (v) ಹೌದು, (vi) ಅಲ್ಲ, (viii) ಹೌದು.

2. (ii) ಅಲ್ಲ, (iii) $-5, -10-a$, (iv) -8, (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

(vi) $f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, (vii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, (viii) -2.

(ix) 7, (x) 2, (xii) 11, (xiii) 2, (xv) 4, 2

(xvi) $d * c * b * a^{-1}$, (xvii) abc^{-1}, (xviiii) 9,

(xix) 9, (xx) -5, (xxi) 5, (xxii) 3, 4

3. ಅಲ್ಲ, 4. ಹೌದು, 5. ಅಲ್ಲ, 6. ಹೌದು.

15. (i) ಹೌದು, (ii) ಅಲ್ಲ, (iii) ಹೌದು, (iv) ಹೌದು,

(v) ಹೌದು, (vi) ಹೌದು, (vii) ಹೌದು, (viii) ಅಲ್ಲ,

(ix) ಹೌದು, (x) ಹೌದು

19. ಅಲ್ಲ, 20. $\{1\}, \{1, -1\}, \{1, -1, i\}$

21. H_1 - ಉಪಸಂಕುಲ H_2 – ಉಪಸಂಕುಲವಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ 4

(2) $4\hat{i} + 8\hat{k}$ (3) $(0, -2, 13)$, $\frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 13\hat{k}}{\sqrt{173}}$

(4) $-\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$, $\frac{3}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+2\hat{k}$

(5) $\vec{a}+3\vec{b}$, $3\vec{b}-\vec{a}$, $2(\vec{a}+\vec{b})$, $(-\vec{a}-3\vec{b})$

(6) $\frac{1}{2}$ (7) $l=-6 \quad m=-1$ (8) $x=-\frac{1}{3} \quad y=\frac{4}{3}$

(9) $7, \frac{\pi}{3}$ (10) $\frac{1}{\sqrt{16}}\left[-2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right]$

(11) *ABCD* ಯು ವಜ್ರಾಕೃತಿ (12) $5\sqrt{2}$ (13) $-\frac{1}{5}$

(15) -3 (19) $3\hat{i}+23\hat{j}-\hat{k}$ (20) $(1, -3, -5)$

(21) $\sin\theta=\left[\frac{155}{156}\right]^{\frac{1}{2}}$ $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{155}}\left[-3\hat{i}+5\hat{j}+11\hat{k}\right]$ (23) (i) 3

(ii) 2 (iii) 0 (iv) 4 (24) $-20\hat{i}-6\hat{j}-22\hat{k}$ (25) $5\sqrt{3}$

(26) $5\sqrt{5}$ (27) $\frac{1}{2}\sqrt{107}$ (28) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ (30) (i) 7 (ii) 10

(iii) 24 (32) -4 (38) (i) 3, (ii) 4, (iii) 3, (iv) 0

(v) -4 (41) -24 (42) $\frac{1}{\sqrt{270}}[11\hat{i}-10\hat{j}-7\hat{k}]$

(43) 0 (44) $\pm\frac{1}{\sqrt{142}}\left(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}\right)$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

I. 1. $x^2+y^2-6x+10y+18=0$ 2. $x^2+y^2+10y-11=0$

II. (1) $\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, 2 (2) $\left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$, 2

III. 1. $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 16x + 4y - 32 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

5. $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0$

6. $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$

9. $\left(\frac{1}{13}, \frac{-21}{13}\right)$

10. $4x^2 + 4y^2 - 4cx - 4cy + c^2 = 0$

12. $2x^2 + 2y^2 - x - 47 = 0$

13. (4.3) (4.3) ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

14. $5x^2 + 5y^2 - 8x - 14y - 32 = 0$

15. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

16. $x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0$

17. $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 26$; $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 26$

18. $(x+4)^2 + 9 = (x-K)^2 + y^2$. $K = -10 \pm \sqrt{54}$

19. $(x \pm 5)^2 + (y-3)^2 = 25$

20. $x^2 + y^2 - 8x - y - 54 = 0$; $4\sqrt{13}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. $3x + 4y = 0$

2. $y = x + 3$ ಮತ್ತು $y = x - 5$

3. $3x - 4y = 21$ ಮತ್ತು $4x + 3y = 3$

4. $(3, -1)$

5. $x \pm y - \pm 2\sqrt{2}$

6. $4x + 3y = 25$, $4x + 3y + 5 = 0$ ಮತ್ತು
$3x - 4y + 20 = 0$, $3x - 4y = 10$

7. (2, 1)

8. $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{13}}, \pm\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

9. $C = 2 \pm 2\sqrt{1+m^2}$

10. (1, 1)

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

2. $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 2 = 0$ 3. 4 ಮಾನಗಳು 4. $\sqrt{c_1 - c}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. $4x + y - 1 = 0$
2. $7x + 3y + 3 = 0$
3. $12x + 8y - 13 = 0$
4. $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$
5. $(-2, -1)$
6. $x - y = 0$
7. $3x + 4y + 7 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

2. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 6x - 3y = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 10x - 36y + 52 = 0$
5. $x^2 + y^2 = 1$ ಮತ್ತು $4(x^2 + y^2) - 15x - 4 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 2 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 43 = 0$
8. $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + C_1 - C_2 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

I	ನಾಭಿ	ಶೃಂಗ	ನಾಭಿಲಂಬದ ತುದಿಗಳು	ಬಾಲಃಗಳು
1.	(5, 0)	(0,0)	(5, ±10)	$x = -5$
2.	$\left(0, -\frac{1}{6}\right)$	(0, 0)	$\left(\pm\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$	$y = \frac{1}{6}$
3.	$\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, \pm 2\right)$	$2x + 1 = 0$

II. 1. $8x^2 = y$ 2. $x^2 + 2xy + y - 22x + 18y + 25 = 0$

3. $(2, \pm 4)$

4. $(y-3)^2 = 8(x-4)$ or $(y-3)^2 = -8(x-8)$

5. $(x-1)^2 = 16(y-5)$, $(x-1)^2 = -16(y+3)$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1.	ನಾಭಿ ಬಿಂದುಗಳು	ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ	ಚಾಲಕಗಳು
(i)	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}x = \pm\sqrt{3}$
(ii)	$\left(\pm\sqrt{6}, 0\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$x = \pm\sqrt{6}$
(iii)	(0, 5) (0, 1)	$\frac{2}{3}$	$2y = \pm 9$
(iv)	(2, -1) (-2, -1)	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$x = \pm 10$

2. $7x^2 + 7y^2 + 2xy - 50x + 34y + 103 = 0$

3. $10x^2 + 3y^2 = 187$

4. $\frac{1}{2}, 3$

5. $31x^2 - 2xy + 31y^2 - 66x + 126y + 127 = 0$

6. $20x^2 + 36y^2 = 405$

7. $3x^2 + 4y^2 = 12$

8. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

9. $\frac{(x-y+1)^2}{12} + \frac{(x+y-5)^2}{16} = 1$

10. $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$

11. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{20} = 1$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1. $7x^2+12xy-2y^2-2x+14y-22=0$
2. $15x^2-y^2+8x-16=0$
3. (i) $6, 8, (\pm 5, 0), \frac{5}{3}, 10\frac{2}{3}$

   (ii) $6, 4, (\pm\sqrt{3}, 0), \frac{\sqrt{13}}{3}, 2\frac{2}{3}$

   (iii) $4\sqrt{6}, 10, (0, \pm 7), \frac{7}{2\sqrt{6}}, \frac{25}{\sqrt{6}}$

   (iv) $4\sqrt{3}, 4, (6, -1) (-2, -1), \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}$

   (v) $8, 6, (1, -1) (-9, -1), \frac{5}{4}, \frac{9}{2}$

4. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 6. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

7. $5x^2-4y^2=\frac{80}{9}$ 8. $9x^2-7y^2+343=0$

9. $7y^2+24xy-24ax-6ay+15a^2=0$

ಅಭ್ಯಾಸ 6.4

1. $x-y-1=0, \quad x+y+3=0$
2. $2x+3y+9=0$
3. $8x+12y+27=0$
4. $4x-5y+13=0, \quad 5x+4y-30=0$
5. $2x-3y-18=0, \quad 3x+2y-1=0$
7. $3x+y=\pm 2\sqrt{37}$
8. $x-y-3=0, \quad x+y-9=0$
9. $\sqrt{13}x-3y\pm 9=0, \quad \sqrt{13}x+3y\pm 9=0$
10. $2y=x\pm 4$
11. $k=\frac{9a}{2}$ 12. $4y=x+28$ 13. $x\pm y+a=0$

ಅಭ್ಯಾಸ 7

I 1. $\frac{-\pi}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{4}{3}$

5. $\frac{24}{25}$ 6. $\frac{\pi}{2}$ 7. $\frac{3}{5\sqrt{34}}$ 8. $\frac{\pi}{4}$

9. 130^0 10. -15^0 11. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 12. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

13. 170^0 14. $\frac{297}{425}$ 15. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 16. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

17. $\frac{\pi}{2}$ 18. 20^0 19. $2-\sqrt{3}$ 20. $\frac{\pi}{2}$

21. $\frac{\pi}{4}$ 22. $-\frac{13}{5}$

III 1. 13 2. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\sqrt{3}$

5. $0, \pm\frac{1}{2}$ 6. 1 7. 3 8. $\frac{a-b}{1+ab}$

9. $\frac{\pi}{4}$ 10. $4\sqrt{\frac{3}{7}}$ 11. $\pm\frac{1}{2}$ 12. $x^2 = \frac{1}{10+4\sqrt{2}}$

13. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ 14. $0, \frac{1}{2}$ 15. $x = \pm 2$ 16. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

17. $(1, -1)$ 18. 2

ಅಭ್ಯಾಸ 8

I (1) $n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (2) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (3) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(4) $n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{3}$ (5) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (6) $\frac{n\pi}{3} + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

(7) $\frac{n\pi}{4}, \left(\frac{2n+1}{10}\right)\pi$ (8) $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{5}, 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

(9) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{9}$ (10) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

II (1) $\frac{2}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n\pi$ (2) $\left(n \pm \frac{1}{4}\right)\pi, 2\left(n \pm \frac{1}{2}\right)\pi$

(3) $\left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\pi$ (4) $n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right), n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

(5) $n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{\pi}{3}$ (6) $2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

(7) $2n\pi \pm 2\frac{\pi}{3}$ (8) $\frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}, n\pi \pm \frac{\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

(9) $2n\pi, 2n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$ (10) $n\pi - \frac{\pi}{4}, n(180^0) + 63^0 26'$

(11) $n\pi, n(180^0) + 67^0 30'$ (12) $n\pi + \frac{\pi}{4}, n(180^0) + 26^0 34'$

(13) $2n\pi, 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$ (14) $n\pi + (-1)^n \frac{3\pi}{4}$

(15) $2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (16) $2n\pi, 2n\pi \pm 50^0 29'$

(17) $x + 38^0 40' = 2n\pi \pm 20^0 37'$ (18) $n\pi + 43^0 10'$

(19) $2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (20) $(2n+1)\frac{\pi}{8}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{9}$

(21) $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (22) $\frac{n\pi}{6}, \frac{n\pi}{9}$

(23) $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (24) $\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{4}, 2n\pi+\frac{\pi}{4}$

(25) $\frac{(2n+1)\pi}{10}, \frac{(2n+1)\pi}{2}$ (26) $\frac{(2n+1)\pi}{4}, n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(27) $n\pi+\frac{\pi}{4}, 2n\pi, 2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (28) $2n\pi+\frac{\pi}{12}, 2n\pi-\frac{7\pi}{12}$

(29) $2n\pi+\frac{5\pi}{4}, 2n\pi-\frac{3\pi}{4}$ (30) $\frac{n\pi}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}, \frac{n\pi}{2}$

(31) $\frac{n\pi}{2}, \frac{2n\pi+\pi}{5}, n\pi-\frac{\pi}{2}$ (32) $\frac{n\pi}{5}\pm\frac{\pi}{20}, \frac{n\pi}{4}$

(33) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ (34) $n\pi, n\pi-\frac{\pi}{4}$

(35) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ (36) $2n\pi+\alpha, \cos\alpha=\frac{3}{5}$

(37) $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ (38) $n\pi+\frac{\pi}{4}, n\pi+\frac{\pi}{6}$

(39) $2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{9}{10}-\cos^{-1}\frac{3}{5}$ (40) $\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}$

(41) $n\pi, n\pi-\frac{\pi}{4}$ (42) $n\pi+\frac{\pi}{4}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9

1. (i) $8-i$ (ii) $\frac{8}{25}-\frac{6i}{25}$ (iii) $-\frac{1}{2}-i.\frac{1}{2}$

(iv) $0-5i$ (v) $0-2i$

2. (i) $2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ (ii) $1\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

(iii) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

(iv) $8[\cos\pi+i\sin\pi]$ (v) $1\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

(vi) $2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$

(vii) $2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

(viii) $\sec\alpha[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)]$

3. (i) $-8-i8\sqrt{3}$ (ii) $-32i$ (iii) $-16\sqrt{3}-16i$

(iv) $-i$ (v) 14 (vi) $2^6\cos\frac{5\pi}{6}$ (vii) 0

4. (i) -1 (ii) $\sin 9\alpha - i\cos 9\alpha$ (iii) -1 (iv) 1

(v) -1 (vi) $\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}$

20. (i) $2^{\frac{1}{6}}\cos\left(\frac{8n\pi+3\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{8n\pi+3\pi}{12}\right)$ $n=0, 1, 2$

(ii) $12^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{(6n+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(6n+1)\pi}{3}\right)\right]$ $n=0,1,2$

(iii) $\cos\left(\frac{2n\pi+\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi+\pi}{8}\right)$ $n=0, 1, 2, 3$

(iv) $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, -1$

(v) $8^{\frac{1}{8}}\left[\cos\frac{8n\pi-3\pi}{16}+i\sin\frac{8n\pi-3\pi}{16}\right]$ $n=0,1,2,3$

(vi) $2^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{6n\pi-\pi}{9}+i\sin\frac{6n\pi-\pi}{9}\right]$ $n=0,1,2$

(vii) $2\left[\cos\left(\frac{2n\pi+\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi+\pi}{4}\right)\right]$ $n=0, 1, 2, 3$

(viii) $3, 3\omega, 3\omega^2$ (ix) $-7, -7\omega, -7\omega^2$

21. (i) $\pm i, \pm i, \pm 1$

(ii) $\pm 1, \pm i, \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{5}\right]+i\sin\left[\frac{(2n+1)}{5}\pi\right]$ $n=0, 1, 2, 3, 4$

(iii) $\cos\left(\frac{6n\pi+\pi}{18}\pm i\sin\frac{6n\pi+\pi}{18}\right)$ $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

(iv) $3^{1/3}, 3^{1/3}\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$ (v) $1, \pm 1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(vi) $\cos\frac{2n\pi}{9}+i\sin\frac{2n\pi}{9}$ $n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (22) 1

(24) $\cos\left(\frac{24n\pi+5\pi}{72}\right)+i\sin\left(\frac{24n\pi+5\pi}{72}\right)$ $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

I 1. $15x^{14}$ 2. $\frac{-2}{x^3}$ 3. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ 4. $\frac{x^2}{2}-1-\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^3}$

5. $5^x\log 5$ 6. $3e^{3x}$ 7. $-4\operatorname{cosec}^2 4x$ 8. $3\sec^2 3x$

9. $\frac{3}{3x+1}$ 10. $-\frac{8}{3}\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$ 11. $3x^2-\frac{3}{x^4}+\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{x^2}$

12. $3ax^2+2bx+c$ 13. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ 14. $-3^{-x}\log 3$

15. $8x - 8\cos x + \frac{1}{x}$ 16. $12x + 1$ 17. $\frac{-5}{(x-3)^2}$

18. $x^2 \cos x + \sin x(2x)$ 19. $-\sqrt{x}\sin x + \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$

20. $\frac{2}{\sqrt{x}}\sec 3x \sec^2 2x + \frac{3\sec 3x \tan 3x \tan 2x}{\sqrt{x}} + \sec 3x \tan 2x\left(\frac{-1}{2x^{3/2}}\right)$

21. $\frac{e^x}{x} + \log xe^x$ 22. $-\sqrt{x}\, \text{cosec} x \cot x + \frac{\text{cosec} x}{2\sqrt{x}}$

23. $1 - \frac{1}{x^2}$ 24. $\frac{\sin(3x+5)}{x} + 3\log x \cos(3x+5)$

25. $\frac{(b^2 - a^2)\cos x}{(b + a\sin x)^2}$ 26. $\frac{2(1-x^2)}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$ 27. $\frac{-4\sec^2 x}{(2 + \tan x)^2}$

28. $\frac{(1+\sin x)(1+\log x) - x\log x\cos x}{(1+\sin x)^2}$

29. $\frac{(x^3+1)3^x \log 3 - (3^x+1)3x^2}{(x^3+1)^2}$

30. $\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$ 31. $\frac{-5\cos x}{(2-3\sin x)^2}$

32. $\frac{-[2x^3 \tan x + 3x^2 \tan x + x^3 \sec^2 x + x^4 \sec^2 x]}{(1+x)^2}$

33. $2\sec x(\sec x + \tan x)^2$ 34. $\frac{2}{(\cos x - \sin x)^2}$

35. $\sec^2 x$ 36. 1

37. $\frac{(x^2+1)\{(x+2)\cos x + \sin x\} - (x+2)\sin x 2x}{(x^2+1)^2}$

38. $\frac{1}{2\sqrt{r}} - \frac{1}{2r^{3/2}}$ 39. $\left(\frac{\pi}{2}+1\right), 0$

II 1. $6\cos 6x$ 2. $3\sec^2 3x$ 3. $-\frac{1}{2}\text{cosec}\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$

4. $2x\cos x^2$ 5. $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ 6. $\frac{3}{8}x^{-5/3}$ 7. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

8. $\frac{8}{3}e^{8x/3}$ 9. $\frac{1}{x}$ 10. $10^x \log 10$ 11. 3

12. $-2^{-x}\log 2$ 13. $-a\operatorname{cosec}^2 ax$ 14. p 15. $\sin 2x$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$ 2. $\frac{-x(2x^2+1)}{(x^4+x^2+1)^{3/2}}$ 3. $3(2x^2-x+3)^2(4x-1)$

4. $\frac{-8x}{(2x^2+1)^3}$ 5. $3\tan^2(x^2+x+1)\sec^2(x^2+x+1)(2x+1)$

6. $\frac{2}{1-x^2}$ 7. $-\tanh x$ 8. $e^{\sqrt{\tan x}}\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$ 9. $\frac{\cot x}{\log_e 10}$

10. $\frac{2(x^2-1)}{1-x^2+x^4}$ 11. $-\operatorname{cosec}(x^2+1)[\cot(x^2+1)](2x)$

12. $\frac{e^x}{2\sqrt{\cosh e^x}}\cdot\sinh(e^x)$ 13. $\frac{2\operatorname{cosech}^3\sqrt{x+1}\cdot\sinh(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}$

14. $2\sin(e^x)\cos(e^x)e^x$ 15. $\frac{x\sec^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

16. $\frac{1}{x\log x\log(\log x)}$ 17. $\sec x$ 18. $\frac{\cos(\log\tan x)}{\sin x\cos x}$

19. $\frac{e^{\sqrt{\log\sqrt{\tan x}}}}{2\sin 2x}$ 20. $\frac{e^{\sqrt{\sin\sqrt{x}}}\cdot\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$

21. $x^3e^{\sqrt{x}}\cot x+3\log\sin xe^{\sqrt{x}}x^2+\frac{x^3\log\sin xe^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

22. $\frac{e^{\sin x}}{\sin 2x}$ 23. $e^{x\cot x}(\cot x-x\operatorname{cosec}^2 x)$

24. $\dfrac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} + e^{1/x^2}\left(\dfrac{-2}{x^3}\right)$

25. $\dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

26. $\dfrac{2(\cos x - \sin x)}{(\cos x + x)}$

27. $2\operatorname{cosec} x$

28. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

29. $2x\left[1 + \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4 - 1}}\right]$

30. $\dfrac{1}{x}[-a\sin(\log x) + b\cos(\log x)]$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

(1) 0

(2) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

(3) $\dfrac{\tan^{-1} x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x^2}$

(4) $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1 - x^2}} + e^x \cos^{-1} x$

(5) $\dfrac{x - \sqrt{1 - x^2}\sin^{-1} x}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$

(6) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} + 2x\operatorname{cosec}^{-1} x$

(7) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x - 1}}$

(8) $\dfrac{m\cos(m\sin^{-1} x)}{2\sqrt{\sin(m\sin^{-1} x)}\sqrt{1 - x^2}}$

(9) $\dfrac{4}{(3\cos x + 5)}$

(10) $\dfrac{-m\cos(m\cos^{-1} x)}{\sqrt{1 - x^2}}$

(11) $\dfrac{\sqrt{3}}{(2 + \cos x)}$

(12) $\dfrac{1}{13 + 12\cos x}$

(13) $\dfrac{2\cos(2\sin^{-1} x)}{\sqrt{1 - x^2}}$

(14) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 2$

(15) $\dfrac{-1}{1 + x^2}$

(16) $\dfrac{-3x^2}{2\sqrt{1 - x^6}}$

(17) $\sqrt{a^2 - x^2}$

(18) $\dfrac{\cos^{-1} x - x\sqrt{1 - x^2}}{(1 - x^2)^{3/2}}$

(19) $\dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^4}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

1. $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ 2. $\frac{1}{(1+x^2)}$ 3. $\frac{1}{2(1+x^2)}$ 4. $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

5. $\frac{2}{(1+x^2)}$ 6. $\frac{-1}{2(1+x^2)}$ 7. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 8. 1

9. $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ 10. $\frac{1}{1+x^2}$ 11. $\frac{-2}{1+x^2}$ 12. $\frac{-2}{1+x^2}$

13. $\frac{2}{1+x^2}$ 14. $\frac{-1}{2(1+x^2)}$ 15. $\frac{1}{1+x^2}$ 16. $\frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ 18. $\frac{1}{(1+x^2)}$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.5

1. $2\tan^{-1}x\tan x\sec^2 x+\frac{\tan^2 x}{1-x^2}$ 2. $\frac{x^2\sec h^{-1}x-\sqrt{1-x^2}}{x(1-x^2)^{3/2}}$

3. $\frac{-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)(1+x^2)}$ 4. $\sqrt{a^2+x^2}$ 5. $\sqrt{x^2-a^2}$

6. $1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sinh^{-1}x$ 7. $(-\cos ecx)$ 8. $\frac{-\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

9. $\frac{1}{x}+\text{sech}^2x\cdot\sinh^{-1}x+\tanh x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

10. $\sqrt{1+x^2}+2x\sinh^{-1}x$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.6

I. 1. $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$ 2. $\frac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}$ 3. $\frac{-(\sin y+y\cos x)}{(x\cos y+\sin x)}$

4. $\frac{dy}{dx}=(\log x)^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x\log x}+\log(\log x)\cos x\right]$

5. $-y\left[\frac{\log\cot^{-1}x}{x^2}+\frac{1}{x(1+x^2)\cot^{-1}x}\right]$

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}\left[\frac{x^2\sqrt{1-y^2}}{1+x^2\log x\sqrt{1-y^2}}\right]$

7. $\frac{\log\sin y+y\tan x}{\log\cos x-x\cot y}$

9. $x^{\tan x}\left[\sec^2 x\log x+\frac{\tan x}{x}\right]+(\sin x)^{\cos x}$

$[-\sin x\log\sin x+\cos x\cot x]$

10. $\frac{am\sin mx}{bn\cos ny}$

11. $\frac{2\sqrt{xy}\cos(x+y)-y\cos(\sqrt{xy})-2\sqrt{xy}}{x\cos\sqrt{xy}-2\sqrt{xy}\cos(x+y)-2\sqrt{xy}}$

12. $\frac{x+y}{x-y}$

13. $\frac{\sqrt{1-y^2}}{(1-2y^2)}$

14. $\frac{-y(2x^2\log y+y^2)}{x(2y^2\log x+x^2)}$

15. -1

ಅಭ್ಯಾಸ 10.7

I.

1. $x^{x^x}\left[x^{x-1}+x^x\log x+x^x(\log x)^2\right]$

2. $(\log x)^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x\log x}+\cos x\log(\log x)\right]$

3. $(\sin x)^{\log x}\left[\cot x\log x+\frac{1}{x}\log\sin x\right]$

$+(\log x)^{\tan 3x}\left[\frac{\tan 3x}{x\log x}+3\sec^2 3x\log(\log x)\right]$

4. $\frac{y}{x}$

5. $\frac{1+\log x}{1+\log y}$

6. $x^{\left(\frac{1}{x}-2\right)}[1-\log x]-x^{-x}(1+\log x)$

7. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}\left[\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}+\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}\right]$

8. $(\sinh x)^{\tanh x}\left[1+\operatorname{sech}^2 x\log\sinh x\right]$

9. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]+(\sin x)^x\left[x\cot x+\log\sin x\right]$

10. $(\cosh 2x)^{\sin 3x}\left[\dfrac{2\sin 3x}{\coth x}+\log\cosh 2x(3\cos 3x)\right]$

11. $x^{\tan x}\left[\dfrac{\tan x}{x}+\log x\sec^2 x\right]-(\sinh x)^{\log x}\left[\log x\coth x+\dfrac{\log\sinh x}{x}\right]$

12. $(x+1)(x+2)^{1/3}(x+3)^{1/3}\left[\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+2)}+\dfrac{1}{3(x+3)}\right]$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.8

I. 1. $\dfrac{x}{y}$ 2. $\dfrac{2}{3}$ 3. $\dfrac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$ 4. $-\tan\dfrac{\theta}{2}$

5. $2\operatorname{cosec}2\theta$ 6. $-\tan t$ 7. $-\tan^2\theta$ 8. 6

9. $\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ 10. $e^{\sin^{-1}t+\cos^{-1}t}$ 11. 2 12. $-\cot^3\theta$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.9

1. $-\operatorname{sech} x$ 2. $-\cot^{-1}x$ 3. 1 4. -2 5. -2

6. $\dfrac{(\sin x)^{\tan x}[1+\sec^2 x\log\sin x]}{(\tan x)^{\log x}\left[2\dfrac{\log x}{\sin 2x}+\dfrac{\log\tan x}{x}\right]}$

7. $\dfrac{e^{\sqrt{\sin x}}}{6\sqrt{\sin^5 x}}$ 8. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3(1+x^2)}$ 9. $\dfrac{2}{x}$ 10. $\dfrac{-(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.10

1. (i) $2\cos 2x$ (ii) $\frac{-4}{25}x^{-9/5}$ (iii) $\frac{3\log x(2-\log x)}{x^2}$

(iv) $50\cos 10x - 118\cos 6x$ (v) $\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1.

	ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ	ಲಂಬರೇಖೆ
(i)	$2x+15y-62=0$	$15x-2y-7=0$
(ii)	$3x-y-1=0$	$x+3y-7=0$
(iii)	$3x-2y+2=0$	$2x+3y-16=0$
(iv)	$x-2y-4=0$	$2x+y+7=0$
(v)	$5x-3y+18=0$	$3x+5y+4=0$
(vi)	$x-4y-12=0$	$4x+y-14=0$
(v)	$4x+2y-3=0$	$2x-4y+1=0$
(vi)	$\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$	$\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2$

2. (0, 7) ಮತ್ತು (2, 3) 3. $a=4,\ b=-14$

4. $a=2,\ b=-7$ 5. $y\pm\sqrt{2}x=0$ 7. $3x-y-4=0$

8. $x-4y+1=0,\ x-4y+9=0$

9. $x-2y-4=0,\ 2x+y+2=0$

10. $6x+y+1=0,\ x-6y+31=0$

11. $5x-4y+3=0,\ 4x+5y-14=0$

12. $\frac{49}{8}$ ಚ.ಮೂ.ಮಾ

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

I. 1. $\tan^{-1}\frac{7}{11}$ 2. $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ 3. $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ 4. $\frac{\pi}{4}$ 5. 0

II. 1. $\tan^{-1}3$ 2. $\tan^{-1}\left(\frac{8}{15}\right)$ 3. $\tan^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)$ 4. $\frac{\pi}{2}$ & $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

5. 0 6. $\tan^{-1}(3)$

IV $x-y+1=0$; $x+y+1=0$

V $3x+y-10=0$; $x-3y+10=0$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. i) $\frac{1}{2}$; 2 ii) 15; $\frac{3}{5}$ iii) $\frac{3}{2}$; 6 iv) 4; 4 v) $\frac{5}{2}$; $\frac{8}{5}$

vi) $\frac{-a}{2\sqrt{2}}; \frac{-b^2}{2\sqrt{2a}}$ vii) 4; 4 viii) $-6; -\frac{8}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4

1. $t=4$ ಸೆ., $v=8$ ಮೀ/ಸೆ 2. $\frac{40}{7}$ ಮೈ/ಗಂ

3. 4.82 ಅಂ; 0.298 ಅಂ/ನಿ 4. 2.4 ಮೈ/ಗಂ

5. $\frac{1}{\pi}$ ಅಂ/ಸೆ; $\frac{2}{9\pi^2}$ ಅಂ/ಸೆಂ^{2} ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ

6. $\frac{1}{5\pi}$; 20 7. 128π

8. ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ $\frac{1}{90\pi}$ ಘ.ಅಂ 9. ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 1300π ಘ.ಅಂ

10. a. $-160, -12, -166, \pm 4\sqrt{249}$ b. $45, 25, -6, \pm 6$

c. $-5\pi, 0, -5\pi, \frac{-5\pi^2}{2}$ d. $70, 30, -5, 2\sqrt{15}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.5

1. (a) 30, -30 (b) $\frac{39}{4}$, 3 (c) -56, 0 (d) $\frac{21}{16}$, 0 (e) 54, -71

2. ಗರಿಷ್ಠಬೆಲೆ $\frac{9}{8}, \frac{9}{8}$ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ 0, -2

3. 10, 10

6. 1, 1 ಕನಿಷ್ಠ ಮೊತ್ತ 2

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $ax+\frac{x^2}{2}+C$, $ax+\frac{x^3}{3}+C$,
$ax-\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $a^2x+\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

2. $a\log x+C$, $a\log x+x+C$, $\log(a+x)+C$, $a\log x-x+C$

3. $\frac{3x^8}{8}-\frac{4x^7}{7}-\frac{5x^4}{4}+7x+C$ 4. $\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{2}+x+C$

5. $x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C$ 6. $\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-2x+C$

7. $\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+C$

8. $\frac{2}{11}x^{11/2}+\frac{9}{4}x^{9/2}+\frac{2}{7}x^{7/2}+C$

9. $-9\cot x+8\operatorname{cosec}x+C$ 10. $\tan x+\sec x+C$

11. $-\cot x-\operatorname{cosec}x+C$ 12. $-\cot x+\operatorname{cosec}x+C$

13. $-\cos x+\sin x+C$ 14. $-\cos x-\sin x+C$

15. $-\operatorname{cosec}x+C$ 16. $\sec x+C$ 17. $\tan x-\cot x+C$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

1. $\frac{(x+1)^6}{6}+C$ 2. $\frac{(x+1)^{-6}}{-6}+C$

3. $\frac{1}{2}\log(2x+1)+C$ 4. $\frac{-1}{12}(3x+1)^{-4}+C$

5. $\frac{(ax+3)^5}{5a}+C$ 6. $\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+C$

7. $\frac{-\cos(2x+1)}{2}+C$

8. $\frac{-2}{3}(5-3x)^{1/2}+C$

9. $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+C$

10. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$

11. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

12. $-\frac{\cos 2x}{4}+C$

13. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$

14. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$ ಅಥವಾ $\frac{-3\cos x}{4}+\frac{\cos 3x}{12}+C$

15. $\frac{\sin 3x}{12}+\frac{3}{4}\sin 3x+C$

16. $\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 5x}{10}+C$

17. $\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

18. $\frac{\cos 10x}{-20}-\frac{\cos 4x}{8}+C$

19. $\tan x-x+C$

20. $\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+C$

21. $-\cot x-x+C$

22. $\frac{-\cot^3 x}{3}+\cot x+x+C$

23. $\frac{\sec^3 x}{3}+C$

24. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$

25. $\frac{e^{ax+b}}{a}+C$

26. $\frac{-1}{3}\sin(2-3x)+C$

27. $\frac{-1}{5}\text{cosec}(5x-3)+C$

28. $\frac{\sec(3x+2)}{3}+C$

29. $\frac{-(7-3x)^5}{15}+C$

30. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}$

31. $\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + C$

32. $-\frac{\coth^3 x}{3} + C$

33. $-\frac{\coth^4 x}{4} + C$

34. $-e^{-x} - \frac{-e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-5x}}{5} + C$

35. $-\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C$

36. $\frac{-\cos x}{2} + C$

37. $-\cot x + C$

38. $\frac{-\cot 5x}{5} + C$

39. $\frac{\log(4x-3)}{4} + C$

40. $-2(a-x)^{1/2} + C$

41. $e^x - e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} + C$

42. $\frac{1}{2}\log(\sec 2x + \tan 2x) + C$

43. $-\frac{1}{2}\log(\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x) + C$

44. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{\sin 4x}{32} + C$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.3

1. $\log \sin x + C$

2. $\frac{-(x^2+1)^{-2}}{4} + C$

3. $-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-4} + C$

4. $2(1+e^x)^{1/2} + C$

5. $\frac{-1}{6}(1-x^4)^{3/2} + C$

6. $\frac{1}{3}\log(x^3+1) + C$

7. $\log(1+\sin x) + C$

8. $\log(1+\tan x) + C$

9. $-\log(1+\cot x) + C$

10. $\frac{(\tan^{-1} x)^2}{2} + C$

11. $\log(\sin^{-1} x) + C$

12. $\frac{(1+\tan^{-1} x)^{m+1}}{m+1} + C$

13. $\frac{(\log x)^3}{3} + C$

14. $\log(\log x) + C$

15. $\frac{1}{m}\log(2 + e^{m\sin^{-1} x}) + C$

16. $\frac{1}{12}\log(4 + 3x^4) + C$

17. $\left(1 + e^{x^2}\right)^{1/2} + C$

18. $\log(1 + e^x) + C$

19. $\log(1 + xe^x) + C$

20. $-(1 - 2\sin x)^{1/2} + C$

21. $\frac{-1}{4b(a + b\tan x)^4} + C$

22. $\frac{1}{3}\log(4 + 3\sin^2 x) + C$

23. $-\frac{1}{2}\log(5 + 2\cos^2 x) + C$

24. $\frac{1}{b}\frac{(a + b\log x)^{m+1}}{(m+1)} + C$

25. $\frac{1}{6}(3 + 4\tan x)^{3/2} + C$

26. $\frac{2}{3b}(a - b\cot x)^{3/2} + C$

27. $\frac{2}{3b}(a + be^{\sin x})^{3/2} + C$

28. $2(\log x)^{1/2} + C$

29. $-\frac{\cos ax}{a} + C$

30. $-\frac{b}{a}\cos\frac{ax}{b} + C$

31. $-2\cos\sqrt{x} + C$

32. $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

33. $-\frac{1}{3a}\cos ax^3 + C$

34. $\frac{\sin ax}{a} + C$

35. $a\sin\frac{x}{a} + C$

36. $\frac{1}{2}\sin(x^2 + 1) + C$

37. $\frac{1}{3}\sin(1+x^3)+C$

38. $\frac{\sin^3 x}{3}+C$

39. $\frac{-\cos^4 x}{4}+C$

40. $\frac{\tan^2 x}{2}+C$

41. $\frac{-\log\cos(mx)}{m}+C$

42. $\frac{\log\sin ax}{a}+C$

43. $\frac{1}{a}\log(\sec ax+\tan ax)+C$

44. $-\frac{1}{m}\log(\mathrm{cosec}\, mx+\cot mx)+C$

45. $-\frac{1}{2}\log\cos x^2+C$

46. $\frac{1}{3}\log\sin(x^3)+C$

47. $\tan x-\cot x-4x+C$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.4

1. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2}+C$

2. $\frac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{3x}{\sqrt{5}}+C$

3. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+C$

4. $\frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{2x^2}{3}+C$

5. $\frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{2x^{3/2}}{3}+C$

6. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}e^x}{2}+C$

7. $\frac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}\sin x}{3}+C$

8. $\frac{1}{\sqrt{21}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{7}}+C$

9. $\frac{1}{5\sqrt{6}}\tan^{-1}\frac{5\cosh x}{\sqrt{6}}+C$

10. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{3}+C$

11. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2\log x}{3}+C$

12. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\left[\frac{2\sin x}{\sqrt{5}}\right]+C$

13. $\frac{-1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{5}}\right)+C$

14. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan x}{3}\right)+C$

15. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan x}{3}\right)+C$

16. $\frac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}\tan x}{3}\right)+C$

17. $\frac{1}{\sqrt{21}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}\tan x}{\sqrt{3}}\right)+C$

18. $\frac{1}{8m}\log(9+4e^{2m\tan^{-1}x})+C$

19. $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\log\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)+C$

20. $\frac{1}{20}\times\frac{1}{2}\log\left(\frac{4+5x}{4-5x}\right)+C$

21. $\frac{1}{2\sqrt{30}}\log\frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}x}{\sqrt{10}-\sqrt{3}x}+C$

22. $\frac{1}{4\sqrt{7}}\log\frac{\sqrt{7}+2x}{\sqrt{7}-2x}+C$

23. $\frac{1}{48}\log\frac{3+4x^2}{3-4x^2}+C$

24. $\frac{1}{90}\log\frac{5+3x^3}{5-3x^3}+C$

25. $\frac{1}{12}\log\frac{3+2\sin x}{3-2\sin x}+C$

26. $\frac{1}{4\sqrt{6}}\log\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}e^x}{\sqrt{8}-\sqrt{3}e^x}+C$

27. $\frac{1}{4}\log\left(\frac{2+\log x}{2-\log x}\right)+C$

28. $\frac{1}{12}\log\left(\frac{4+3\sqrt{x}}{4-3\sqrt{x}}\right)+C$

29. $\frac{1}{18}\log\left(\frac{3+2x^{3/2}}{3-2x^{3/2}}\right)+C$

30. $\frac{-1}{4\sqrt{15}}\log\frac{(\sqrt{12}+\sqrt{5}\cos x)}{(\sqrt{12}-\sqrt{5}\cos x)}+C$

31. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left(x\sqrt{5}+\sqrt{9+5x^2}\right)+C$

32. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(x\sqrt{3}+\sqrt{16+3x^2}\right)+C$

33. $\frac{1}{2}\log\left(2x+\sqrt{7+4x^2}\right)+C$

34. $\frac{1}{6}\log\left(3x^2+\sqrt{16+9x^4}\right)+C$

35. $\frac{1}{60}\log\left(4x^3+\sqrt{25+16x^6}\right)+C$

36. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(\sqrt{3}e^x+\sqrt{5+3e^{2x}}\right)+C$

37. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left[\sqrt{5}\sin x+\sqrt{4+5\sin^2 x}\right]+C$

38. $\frac{1}{2}\log(2\sin x+\sqrt{5+4\sin^2 x})+C$

39. $\frac{-1}{\sqrt{3}}\log\left(\sqrt{3}\cos x+\sqrt{7+3\cos^2 x}\right)$

40. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left(\sqrt{5}\sinh x+\sqrt{4+5\sinh^2 x}\right)+C$

41. $\frac{1}{4}\log\frac{x-2}{x+2}+C$

42. $\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}+C$

43. $\frac{\sin^{-1}x}{2}-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$

44. $x-\tan^{-1}x+C$

45. $\frac{1}{8}\left(\sin^{-1}x-x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}\right)+C$

46. $(x^2-a)^{1/2}+C$

47. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

48. $\frac{\sin^{-1}x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$

49. $\sec^{-1}x+C$

50. $-\frac{1}{x}-\tan^{-1}x+C$

51. $\frac{1}{3}\log\left(3x+\sqrt{9x^2-16}\right)+C$

52. $\frac{1}{4}\log\left(2x^2+\sqrt{4x^4-25}\right)+C$

53. $\frac{1}{28}\log\left(7x^4-9\right)+C$

54. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left(\sqrt{5}e^x+\sqrt{5e^{2x}-6}\right)+C$

55. $\frac{2}{9}\log\left(3x^{3/2}+\sqrt{9x^3-8}\right)+C$

56. $\frac{1}{2}\log\left[2\sin x+\sqrt{4\sin^2 x-25}\right]+C$

57. $\frac{1}{\sqrt{8}}\log\left(\sqrt{8}\tan x-\sqrt{8\tan^2 x-25}\right)+C$

58. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\sinh x}{\sqrt{5}}+C$

59. $\frac{1}{3\sqrt{8}}\log\left(3\sin x+\sqrt{9\sin^2 x-8}\right)+C$

60. $\frac{1}{2}\log\left(2\log x+\sqrt{4(\log x)^2-9}\right)+C$

61. $\frac{1}{30}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{10}\right)+C$

62. $\frac{1}{20}\log\left(\frac{10+3x}{10-3x}\right)+C$

63. $\frac{1}{60}\log\frac{3x-10}{3x+10}+C$

64. $\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{10}+C$

65. $\frac{1}{3}\log\left(3x+\sqrt{9x^2-100}\right)+C$

66. $\frac{1}{3}\log\left(3x+\sqrt{9x^2+100}\right)+C$

67. $\frac{50}{3}\left[\sin^{-1}\frac{3x}{10}+\frac{3x}{100}\sqrt{100-9x^2}\right]+C$

68. $\frac{9}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{3}+\frac{2x}{9}\sqrt{9-4x^2}\right]+C$

69. $\frac{3}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{2x}{3}\sqrt{3-4x^2}\right]+C$

70. $\frac{8}{\sqrt{3}}\left[\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{3}x}{8}\sqrt{8-3x^2}\right]+C$

71. $\frac{10}{3}\left[\sin^{-1}\frac{3x}{\sqrt{10}}+\frac{3x}{10}\sqrt{10-9x^2}\right]+C$

72. $\frac{18}{\sqrt{5}}\left[\sin^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{18}}+\frac{x\sqrt{5}}{18}\sqrt{18-5x^2}\right]+C$

73. $\frac{7}{\sqrt{3}}\left[\sin^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{7}+\frac{x\sqrt{3}}{7}\sqrt{7-3x^2}\right]+C$

74. $\frac{9}{4}\log\left(2x+\sqrt{9+4x^2}\right)+x\sqrt{9+4x^2}+C$

75. $\frac{9}{4}\left[\log\left(4x+\sqrt{9+16x^2}\right)+\frac{4x}{9}\sqrt{9+16x^2}\right]+C$

76. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\log\left(x\sqrt{2}+\sqrt{3+2x^2}\right)+\frac{x\sqrt{2(3+2x^2)}}{3}+C$

77. $\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\log\left(x\sqrt{3}+\sqrt{4}+3x^2\right)+\frac{x\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+3x^2}\right]+C$

78. $\frac{6}{\sqrt{7}}\left[\log(x\sqrt{7}+\sqrt{6+7x^2})+\frac{x\sqrt{7}}{6}\sqrt{6+7x^2}\right]$

79. $\frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a}+C$

80. $\frac{1}{4\sqrt{14}}\log\left[\frac{x\sqrt{7}-\sqrt{8}}{x\sqrt{7}+\sqrt{8}}\right]+C$

81. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\log\frac{2x-\sqrt{5}}{2x+\sqrt{5}}+C$

82. $\frac{1}{2\sqrt{15}}\log\frac{\sqrt{5}+x\sqrt{3}}{\sqrt{5}-x\sqrt{3}}+C$

83. $\frac{1}{2ab}\log\left[\frac{a+bx}{a-bx}\right]+C$

84. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left(\sqrt{5}x+\sqrt{3+5x^2}\right)+C$

85. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2-6}\right)+C$

86. $\frac{1}{3}\log\left[x\sqrt{3}+\sqrt{4+3x^2}\right]+C$

87. $\frac{1}{\sqrt{7}}\log\left(x\sqrt{7}+\sqrt{8+7x^2}\right)+C$

88. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(x\sqrt{3}+3x^2-8\right)+C$

89. $2\sin^{-1}\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C$

90. $\frac{25}{4}\log\left(2x+\sqrt{25+4x^2}\right)+x\sqrt{25+4x^2}+C$

91. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{5x^2-6}\cdot x\sqrt{5}-\frac{3}{\sqrt{5}}\log\left(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2-6}\right)+C$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.5

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right)+C$

2. $\frac{1}{\sqrt{11}}\log\left(\frac{\sqrt{11}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{11}-\tan\frac{x}{2}}\right)+C$

3. $\frac{2}{\sqrt{13}\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{13}}\right)+C$

4. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+C$

5. $\frac{1}{\sqrt{6}}\log\left[\frac{\tan\frac{x}{2}+1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right]+C$

6. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C$

8. $\frac{4}{\sqrt{39}}\tan^{-1}\frac{4x+3}{\sqrt{39}}+C$

9. $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\left(\frac{2x+3-\sqrt{17}}{2x+3+\sqrt{17}}\right)+C$

10. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\left(\frac{x-2-2\sqrt{3}}{x-2+2\sqrt{3}}\right)+C$

11. $\frac{1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(\frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)+C$

12. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{7}}+C$

13. $\log\frac{(2x+1)}{x+1}+C$

14. $2\log\left\{(2x-3)+\sqrt{4x^2-12x+16}\right\}+C$

15. $\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

16. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\sqrt{2}\right)+C$

17. $\log\{(2x-5)+2\sqrt{x^2-5x+8}\}+C$

18. $\log\{(x+1)+\sqrt{x^2+2x-1}\}+C$

19. $\log\{(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\}+C$

20. $\log\{(x-2)+\sqrt{x^2-4x-6}+C$

21. $\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{10}}\right)+C$

22. $\frac{3}{8}\log\{(2x+1)+2\sqrt{1+x+x^2}\}+\frac{\sqrt{3}}{4}(2x+1)+C$

23. $\frac{1}{2}\log\{(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\}+\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+C$

24. $\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+\frac{(x+2)}{2}\left[\sqrt{5-4x-x^2}\right]+C$

25. $\frac{37}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{37}}\right)+\frac{37}{4}(2x-3)\sqrt{7+3x-x^2}+C$

26. $\frac{31}{16}\left[\log(4x-3)+\sqrt{8}\sqrt{2x^2-3x+5}\right]$

$$+\frac{1}{2\sqrt{8}}(4x-3)\sqrt{2x^2-3x+5}+C$$

27. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log(3\cos x+2\sin x)+C$

28. $\frac{x^3}{3}+x+2\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$

29. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$

30. $\frac{x^2}{2}+\log(x+1)+C$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.6

1. $\log\frac{x-2}{x-1}+C$

2. $\log\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-1}+C$

3. $\frac{1}{x-1}+\log\frac{(x-2)}{(x-1)}+C$

4. $-\frac{1}{x}+2\log x-\frac{1}{x-1}-2\log(x-1)+C$

5. $\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}+C$

6. $\log(x)-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$

7. $\frac{1}{2(x^2+1)}+\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

8. $\log\frac{(x-2)^2}{x-1}+C$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.7

1. $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$

2. $\frac{1}{4}x^3\log\frac{x^3}{e}+C$

3. $\frac{1}{4}x^2[2(\log x)^2-2\log x+1]+C$

4. $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\log\frac{x^{n+1}}{e}+C$

5. $x\tan^{-1}x-\log\sqrt{(x^2+1)}+C$

6. $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x+\frac{x}{2}+C$

7. $x\cot^{-1}x+\log\left(\sqrt{x^2+1}\right)+C$

8. $x\sec^{-1}x-\cosh^{-1}x+C$

9. $-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C$

10. $\frac{1}{81}\left(3x\sin 3x+\cos 3x+\frac{x\sin x}{2}+\cos x\right)+C$

11. $\frac{1}{8}(1-2x^2)\cos 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x+C$

12. $\frac{1}{2}(x\sec^2 x - \tan x) + C$

13. $-x\cot x + \log\sin x + C$

14. $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\log(1+x) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x) + C$

15. $\frac{1}{\sqrt{41}} e^{4x} \cos\left(5x - \tan^{-1}\frac{5}{4}\right) + C$

16. $\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} e^x \cos(2x - \tan^{-1} 2) + C$

17. $\frac{1}{4}\cosh 2x \sin 2x - \sinh 2x \cos 2x + C$

18. $\frac{e^{m\tan^{-1} x}}{\sqrt{m^2+1}} \cos\left(\tan^{-1} x - x\cot^{-1} m\right) + C$

19. $x\sin x + \cos x + C$

20. $\frac{x^2}{4}(2\log x - 1) + C$

21. $-\frac{e^{-ax}}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\left[a\cos(bx+b)\sin bx\right] + C$

22. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\sin bx - b\cos bx\right] + C$

23. $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} e^{mb} \cos(\theta - \cot^{-1} m) + C \quad (\because \quad x = \sin\theta)$

24. $x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

25. $\frac{1}{4}\left(\theta\sin\theta + \cos\theta - \frac{\theta\sin 3\theta}{3} - \frac{\cos 3\theta}{3^2}\right) + C \quad (\because \; x = \sin\theta)$

26. $x\tan x + \log\cos x + C$

27. $x\sec^{-1} x - \cosh^{-1} x + C$

28. $\frac{1}{m} e^{m\tan^{-1} x} + C$

29. $\dfrac{a\sin bx\sinh ax - b\cos bx\cosh ax}{a^2+b^2} + C$

30. $\cosh x(x^5+20x^3-120) - x\sinh x(5x^3+60x-120) + C$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. $819, \frac{1}{6}, 2, 211.5$

2. $\frac{1}{3}, \frac{15}{32}, \frac{a^{n+1}}{n+1}(2^{n+1}-1), 2(\sqrt{2}-1)$

3. $\log 3, -\log a, \log\frac{7}{4}, \log 4$

4. $1, 0, 0$

5. $\frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{2}$

6. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \log_e(1+\sqrt{2}), \log_e\frac{3+\sqrt{8}}{2+\sqrt{3}}$

7. $\frac{\pi}{4}, \frac{a^2}{2}\left\{\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right\}, 1.074$

8. $\sqrt{2-1}, \frac{1}{2}\log\frac{9}{5}, \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\sqrt{2} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

9. $\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\log 2$

10. $2\log 2 - \frac{3}{4}, \frac{128}{3}\log 2 - 7, b\log b - a\log a + a - b$

11. $1, \sqrt{2}$

12. $\frac{\pi}{2}-1, \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

13. $-\frac{1}{5}(e^x+2), \frac{1}{5}(e^{2x}+1)$

14. $e-2, \sinh 1$

15. $\frac{a^3}{3}, a\left(\sqrt{2}-1\right)$

16. π, π^2-4

17. $0, \frac{2}{3}$

18. $446, 2.287$

19. $3\left(1-\frac{\pi}{2}\right), \frac{10}{3}-8\log\frac{3}{2}$

20. $\frac{1}{2}\log 3, \frac{1}{2}\log 3$

21. $\frac{1}{\sqrt{7}}\log\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}, \frac{1}{3}\log 2$

22. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}, \frac{3\pi}{16}$

23 $\frac{1}{2}+\log\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{2}{3}$

24. $\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}, \frac{3\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$

25. $0, \frac{4}{9}$

26. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

27. $\frac{\pi}{ab}$

28. $\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}$

29. $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$

30. $\frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\frac{2}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{3}\right], \log\frac{256}{243}$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

7. $\frac{\pi}{4}$

8. $\frac{\pi}{4}$

9. $\frac{7\pi}{4}$

10. $2-\frac{\pi}{4}$

11. $\frac{4}{15}a^{\frac{5}{2}}$

12. $\frac{\pi^2}{4}-\frac{7}{8}$

13. $-\frac{\pi^2}{2}$

14. $\frac{\pi}{4}$

15. $\frac{\pi}{4}$

16. $\frac{\pi}{4}$

17. $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

18. $\frac{\pi}{4}$

19. $\frac{\pi^2}{4}$

20. π

21. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{4}$

3. 9

4. 4

5. $\frac{16}{3}$

6. 2π

7. $\frac{4}{3}$

8. $\sqrt{2}-1$

9. (i) $76\sqrt{a}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}-1$ (iii) $2a(e-e^{-1})$

(iv) $\log 2$ (v) $\frac{40}{3}$ (vi) $1-\frac{\pi}{4}$

10. $12\sin^{-1}\frac{4}{5}$ 11. $9\sqrt{2}\tan^{-1}(2\sqrt{2})-\tan^{-1}(-\sqrt{2})]-9\log 3$

12. $2(\pi+2)$ 13. $\frac{125a^2}{24}$

14. (i) $c^2\sin\frac{h}{c}$ (ii) e^h-1 (iii) $b\log b-a\log a+a-b$

(iv) $\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)-\frac{b^2}{2a}\sqrt{a^2-b^2}$

15. $\frac{64}{3}$ 16. $\frac{1}{4}$ 17. $\frac{1}{3}$ 18. 9

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. $x\frac{dy}{dx}+y=0$ 2. $y\frac{dy}{dx}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=a$

3. (i) $x^2+y^2=p^2$ (ii) $\frac{dy}{dx}=-\cot\alpha$ (iii) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

4. $y\frac{d^2y}{dx^3}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ 5. $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ 6. $\frac{d^2y}{dx^2}=-m^2y$

7. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$ 9. $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0$

10. $y\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

ಅಭ್ಯಾಸ 14.2

1. $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-xy+x^2-2=0$

2. $\frac{d^3y}{dx^3}-9\frac{d^2y}{dx^2}+23\frac{dy}{dx}-15y=0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$

4. $y\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=2x\frac{dy}{dx}$

ಅಭ್ಯಾಸ 14.3

1. $x^2+y^2=k^2$
2. $xy=a$
3. $x=ay$
4. $x^2-y^2=a$
5. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=A$
6. $\frac{1}{x^m}+\frac{1}{y^n}=C$
7. $x^2+3x+3y+y^2=A$
8. $y^3+3y-x^3-3x=A$
9. $2x^3+2y^3+3y^2+6x+6y+3x^2=A$
10. $(1+e^{-x})(1+e^{-y})=C$
11. $\tan x+\tan y=C$
12. $(1+y)(1+e^x)=Ce^y$
13. $\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}y+y\sqrt{1-y^2}=K$
14. $x+y-e^{-x}-e^{-y}=C$
15. $y=K\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}$
16. $C=\sin y\cos y$
17. $\log(x+\sqrt{1+x^2})=\sin^{-1}y=K$
18. $(1-ay)(a+x)=Cy$
19. $(1-e^x)^3=C\tan(\tan y)$

20. $\dfrac{1+\sqrt{2}e^{-y/2}}{1-\sqrt{2}^{-y/2}} = Kx$

21. $Kxy = e^{-(x+y)}$

22. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2} = \log\dfrac{K(1+\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{y^2+1})}{xy}$

23. $\sqrt{1+y^2} = \log\dfrac{K(1+\sqrt{1+x^2})}{x}$

24. $(a+x)(1-ay) = Ky$

25. $x^2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x + C = -\dfrac{\log y}{y} - \dfrac{1}{y}$

26. $y^2\log y = x\sin x + C$

27. $\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y}{2}\sin 2y+\dfrac{1}{4}\cos 2y = -\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\right)+C$

28. $\dfrac{[\log(\sec x+\tan x)]^2}{2} = \dfrac{[\log(\sec y+\tan y)]^2}{2}+K$

29. $\dfrac{(1+x)^{3/2}}{3}-(1+x)^{1/2}+y^{1/2}+\dfrac{y^{3/2}}{3} = K$

30. $\log K(1+e^{-x})(1+y) = y-x$

ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು (ಅಸೈನ್ಮೆಂಟ್ಸ್)

ವಿಷಯಗಳು

ಎ–ಮಾದರಿ

1. ಯಂತ್ರ ವಿಜ್ಞಾನಕ್ಕೆ ಸದಿಶಗಳ ಅನ್ವಯ – ಕೆಲಸ, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಬಲದ ಮಹತ್ವ, ಒಂದು ಯುಗ್ಮದ ಮಹತ್ವ ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಗಳು.
2. ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಅನ್ವಯ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
   ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
3. ಕೋಶಗಳ ಅನ್ವಯಗಳು – ಕೇಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಕೋಶದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. "ರಿಡಕ್ಷನ್" ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಕೋಶದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಕೋಶದ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
4. ಉಪಸಂಕುಲದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳು.
5. ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
6. ಶಂಕುಜಗಳ ಪ್ರಮಾಣಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳು.
7. ಡಿಮೊಯ್ವರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನ್ವಯಗಳು – ಮಿಶ್ರಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳ n^{th} ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
   $\sin 3\theta$ ಮತ್ತು $\cos 3\theta$ ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ವಿಕಸನಮಾಡುವುದು.
8. ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳ ಅನ್ವಯಗಳು – ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಬಿ–ಮಾದರಿ

ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿಜ್ಞರ ಸಾಧನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅರಿವು ಮೂಡಿಸುವುದು.

1. **ಲೈಬ್ನಿಜ್** 2. **ನ್ಯೂಟನ್** 3. **ಆಯ್ಲರ್** 4. **ಗೌಸ್** 5. **ಕೌಷಿ**

6. **ಡೆಕಾರ್ಟೆ** 7. **ಹರೀಶ್–ಚಂದ್ರ** 8. **ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್**

9. ಕೇರಳದ ಗಣಿತಜ್ಞರುಗಳಾದ i. **ಮಾಧವ** ii. **ಪರಮೇಶ್ವರ**

iii. **ನೀಲಕಂಠ** iv. **ಅಚ್ಯುತ ಪಿಷಾರಟಿ**

ಸೂಚನೆ: 5 ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಎ–ಮಾದರಿಯದ್ದು ಹಾಗೂ ಎರಡು ಬಿ–ಮಾದರಿಯದ್ದು ಆಗಿರಬೇಕು. ಉಪನ್ಯಾಸಕರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಹುಟ್ಟಿಸುವಂತಹ ಯಾವುದೇ ಇತರ ಗಣಿತ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ನಿಯೋಜನೆಗಳು (ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ಸ್)

ಸೂಚನೆ: ದ್ವಿತೀಯ ಪಿ.ಯು.ಸಿ.ಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಯಾವುದೇ ನಮೂನೆಯ ಐದು ನಿಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಉಪನ್ಯಾಸಕರು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿಯೋಜನೆಗಳನ್ನು 10 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಿ ನಂತರ ಎಲ್ಲಾ ನಿಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳನ್ನು 5 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು.

ನಿಯೋಜನೆ 1: ಸಂಕುಲ – ಸಂಕಲನ ಅಥವಾ ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಇತರೆ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸಂಕುಲಗಳ ರಚನೆಗಳು.

ನಿಯೋಜನೆ 2: ಪತ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿರದ ಶಂಕುಜಗಳ ಇತರೆ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು.

ನಿಯೋಜನೆ 3: ವೃತ್ತಗಳ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಹಾಗೂ ಸಹವರ್ತಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆ.

ನಿಯೋಜನೆ 4:

(i) ಪ್ಯಾರಬೊಲಾ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಅದರ ಆಕೃತಿಯ ರಚನೆ.

(ii) ಛೇದಿಸುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಪ್ಯಾರಬೊಲಾದ ರಚನೆ.

(iii) ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಪ್ಯಾರಬೊಲವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ 1 cm. ಅಂತರವಿರುವಂತೆ, 1 ರಿಂದ 10ರವರೆಗೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ರೇಖೆಗಳ ಸಂಧಿಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು 1, 2,....,10 ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ. ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು 1, 2, 3, ...10 ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ. (1, 1) (2, 2)... ಹೀಗೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ಹೆಸರಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಹೀಗೆ ಬರುವ ಜಾಲದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(iv) ಒಂದು ಸಮತಲ ಮತ್ತು ಒಂದು ಶಂಕುಜದ ನಡುವಿನ ಛೇದನದ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವಂತಹ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು. ಉದಾ: ವೃತ್ತ, ಪ್ಯಾರಬೊಲಾ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ

(v) "ಒಂದು ಪ್ಯಾರಬೋಲೀಯ ಕನ್ನಡಿಯ ನಾಭಿಯಿಂದ ಹೊರಡುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಆ ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸಿ ಅದರ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ" ಎಂಬ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಒಂದು ಪ್ಯಾರಬೋಲೀಯ ಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಅಥವಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ನಿಯೋಜನೆ 5: ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

(i) OX, OY ಮತ್ತು OZ ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಸದಿಶವೊಂದರ ಕೋನವು α, β ಮತ್ತು γ ಎಂದಾದರೆ (a) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$ ಮತ್ತು (b) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

(ii) (a) $(\vec{P}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{P}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{P}\cdot\hat{k})\hat{k}=\vec{P}$ ಹಾಗೂ

(b) $(\vec{P}\times\hat{i})\times\hat{i}+(\vec{P}\times\hat{j})\times\hat{j}+(\vec{P}\times\hat{k})\times\hat{k}=-2\vec{P}$

(iii) ದತ್ತ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(iv) $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ ಆಗಲು ಇರುವ ನಿಬಂಧನೆ ಏನು?

ನಿಯೋಜನೆ 6: (1) ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ $e^{\sqrt{\sin x}}$, $\sin\sqrt{x}$ ಇಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು. (2) ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳ ಅನ್ವಯ: (a) ಲಾಭದ ಗರಿಷ್ಠೀಕರಣ (b) ಬೆಲೆಯ ಕನಿಷ್ಠೀಕರಣ.

ನಿಯೋಜನೆ 7: ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

(a) $\int_0^2 [2^5-{}^5C_1 2^4 x+{}^5C_2 2^3 x^2-{}^5C_3 2^2 x^3+{}^5C_4 2x^4-x^5]\,dx$

(b) $\int_{-3}^{2}|x|\,dx$ (c) $\int_0^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}\,dx$ (d) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\tan^7 x\,dx$

(e) $\int_0^{\pi}\cos^5 x\,dx$.

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಯುವುದು.

ನಿಯೋಜನೆ 8: (1) ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

(2) ಆಯ್ಲರ್‌–ಉತ್ಪನ್ನ: N ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ Nಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

$$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_n}\right)$$

(3) ವೇದಗಣಿತ

ನಿಯೋಜನೆ 9: ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಕೋಶಗಳ ಅನ್ವಯ

ನಿಯೋಜನೆ 10: (1) ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು.

(2) ದತ್ತ ಬೈಜಿಕ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಜಾಮಿತೀಯ ಸಮತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯುವುದು.

ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯ ನೀಲಿನಕ್ಷೆ

ಕ್ರ. ಸಂ	ಪರಿವಿಡಿ	ಬೋಧನಾ ಅವಧಿ	ಜ್ಞಾನ			ಅರಿವು			ಅಭಿರುಚಿ			ಪ್ರತಿಭೆ (ಕುಶಲತೆ)			
			VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	LA
1	ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಸಮಶೇಷೀಯತಾ ಸಂಬಂಧ	10	1	-	-		1	-	-	-	1	-	-	-	-
2.	ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು	12	-	-	1		1	-	1	-	-	-	-	1	-
3.	ಸಂಕುಲಗಳು	10	1			-	-	-		1	-	-	1	1	-
4	ಸದಿಶಗಳು	10	-	1	-	1	-		-	-	-	-	-	1	1
5	ವೃತ್ತಗಳು	12	-	-	1	1	-	-	-	1	-	-	1	-	-
6	ಪ್ಯಾರಬೋಲಾ	05		1			-	1	-	-	-	1	-	-	1
	ದೀರ್ಘವೃತ್ತ	04													
	ಹೈಪರಬೋಲಾ	04													
7	ಪ್ರತಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	06	-	-	1	1	-	-		1	-	-	-	-	-
8	ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು	04	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-
9	ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	08	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1
10	ವಿಕಲನ	14	-	1	1	-	1	1	1	-	-	-	1	1	1
11	ವಿಕಲನದ ಅನ್ವಯಗಳು	10													
12	ಅನುಕಲನ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಗಳು	8.5	1	1	-	-	1	1	-	-	1	-	1	-	-
13	ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಗಳ ಅನ್ವಯಗಳು	04	-		-		-	-	-	-	1	-	-	-	-
14	ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು	04	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-

	ಜ್ಞಾನ	ಅರಿವು	ಅಭಿರುಚಿ	ಪ್ರತಿಭೆ (ಕುಶಲತೆ)
ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	13	11	8	15

ಉತ್ತರಗಳ ಮಾದರಿ	VSA	SA	ET	LA
ಅಂಕಗಳು	1	2	3 or 4 or 5	6

Code No. 35-NS

ಹೊಸಪಠ್ಯಕ್ರಮ (೨೦೦೫-೨೦೦೬ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ)

Total No. of Questions: 38] [Total No. of Printed Pages: 15

ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆ

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

(New Syllabus)

Time: 3 Hours] [Max. Marks: 90

(Kannada Version)

ಸೂಚನೆ: i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C** ಮತ್ತು **D** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

ii) ವಿಭಾಗ-**A**ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ-**B**ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ-**C**ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ-**D**ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ – A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $10 \times 1 = 10$

1. $8x \equiv 23 (\text{mod } 24)$. ಈ ರೇಖೀಯ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ, ಏಕೆ?

2. $A = \begin{bmatrix} 3-x & y-3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ಒಂದು ಅದಿಶಕೋಶ, ಇವರಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಣದಲ್ಲಿ $a * b = \sqrt{ab}$, * ಒಂದು ಯುಗ್ಮಕರ್ಮ ಇದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

4. $\vec{a}$ ಸದಿಶದ ದಿಕ್-ಕೋಟಿಜ್ಯಾ (ಡೈರೆಕ್ಷನ್ ಕೋಸೈನ್)ಗಳು $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು n ಆದರೆ n ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $3x^2 - py^2 + qxy - 8x + 6y - 1 = 0$ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ p ಮತ್ತು q ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x = at^2$ ಮತ್ತು $y = 2at$ ಗಳನ್ನು ಪ್ರಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುಜದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\sin\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ ಇದರ ಪಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. xಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $7^x\cdot x^7$ ಅನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿ.

10. $\int_0^{\pi/12}\sec^2(3x)dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – B

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $10\times 2=20$

11. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಕನಿಷ್ಠ ಭಾಜಕವು (>1) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ವ್ಯಾಕೋಚಿಸದೆ, $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & c+a\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

13. ಅರ್ಧಸಂಕುಲವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. ಸಂಕುಲವಲ್ಲದ ಒಂದು ಅರ್ಧಸಂಕುಲದ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿ.

14. $\lambda\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ಈ ಸದಿಶಗಳು ಏಕತಲಸ್ಥವಾಗಿದ್ದರೆ λ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $(-3,6)$ ಮತ್ತು $(1,-2)$ ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 8 ಮತ್ತು ದಿಶಾಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 32 ಇರುವ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\dfrac{\pi}{2}$ ಆದರೆ $x^2+y^2=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. $x=\cos\theta+i\sin\theta$ ಮತ್ತು $y=\cos\phi+i\sin\phi$ ಆದರೆ $x^2y+\dfrac{1}{x^2y}=2\cos(2\theta+\phi)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $y=\tan^{-1}\left\{\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}\right\}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $y = x^3 + x^2 - 11$ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $x = 2$ ಇದ್ದಾಗ ಉಪಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬಕದ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. x ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $x^3 \log x$ ಅನ್ನು ಅನುಕಲಿಸಿ.

22. x−ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೂಹದ ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಮೂರು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $3 \times 5 = 15$

23. 189 ಮತ್ತು 243 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. (GCD)ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು $189x + 243y$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ: ಹಾಗೆಯೇ ಈ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯು ಅನನ್ಯ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ. 5

24. (i) ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು $2x + 3y = 5$ ಮತ್ತು $x - 2y = 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

(ii) $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$ ಆದರೆ xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

25. (i) ಒಂದರ ಚತುರ್ಥ ಮೂಲಗಳ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ (ಅಬೆಲೀಯ) ಸಂಕುಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

(ii) 3 ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಕುಲವು ಅಬಿಲಿಯನ್ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

26. (i) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$, ಆದರೆ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \hat{c}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

(ii) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - 2\vec{b})$ ಅನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಎರಡು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $5 \times 2 = 10$

27. (i) $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_1y + c_2 = 0$

ಈ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸಲು ಇರುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

(ii) $7x - 24y - 35 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು

$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$
ಈ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

28. (i) $9x^2 - 4y^2 + 18x - 8y - 31 = 0$ ಈ ಅತಿಪರವಲಯದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

(ii) ಒಂದು ಪರವಲಯದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವು (–3, 1) ಮತ್ತು ದಿಶಾಕ್ಷವು $y = 6$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. (i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{2\pi}{3}$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

(ii) $\sin^2 \theta = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಮೂರು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $3 \times 5 = 15$

30. (i) x ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $\log x$ ಅನ್ನು ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಅವಕಲಿಸಿ. 3

(ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ ಆದರೆ (1, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. (i) $y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ ಆದರೆ, $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

(ii) xe^x ನ ಕನಿಷ್ಠಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

32. (i) $\int \dfrac{dx}{5 + 4\cos x}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

(ii) t ಸಮಯಲ್ಲಿ s ಸ್ಥಳಾಂತರವು $s = \sqrt{1-t}$ ಎಂದಾದರೆ ವೇಗವು ಸ್ಥಳಾಂತರಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

33. (i) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ ಅನ್ನು $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅವಕಲಿಸಿ. 3

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2 - 4x + 2}}$ ಅನ್ನು x ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅನುಕಲಿಸಿ. 2

34. $y = 11x - 24 - x^2$ ಈ ಪರವಲಯ ಮತ್ತು $y = x$ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ – D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $2 \times 10 = 20$

35. (i) ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಆದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

(ii) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ A^3 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

36. (i) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ ಆದರೆ

(a) $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ ಮತ್ತು $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(b) $\cos^2 x + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{3}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

(ii) $\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$ ಈ ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

37. (i) ಒಂದು ಲಂಬ ವರ್ತುಲ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದು, ಅದರೊಳಗೆ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ನೀರಿನ ಆಳವು 16 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದಾಗ ನೀರಿನ ಆಳ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

(ii) $\sqrt{3}\cot x + 1 = \sqrt{2}\operatorname{cosec} x$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. (i) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ, ಅದರೊಂದಿಗೆ $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ. 6

(ii) ಸದಿಶ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

Code No. 35-NS

ಹೊಸಪಠ್ಯಕ್ರಮ (೨೦೦೫-೨೦೦೬ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ)

Total No. of Questions: 38] [Total No. of Printed Pages: 15

March/April, 2006

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

(New Syllabus)

Time: 3 Hours] [Max. Marks: 90

(Kannada Version)

ಸೂಚನೆ: iii) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C** ಮತ್ತು **D** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

iv) ವಿಭಾಗ-**A**ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ-**B**ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ-**C**ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ-**D**ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ – A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $10 \times 1 = 10$

1. $6x \equiv 3 \pmod{15}$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಎಷ್ಟು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & x \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗೆ ವಿಲೋಮ ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ xನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

3. ಗುಣಾಕಾರದ ಮಾಡ್ಯುಲೋ 5ರ ಸಮುದಾಯ $G = \{1, 2, 3, 3, 4\}$ ರಲ್ಲಿ $(3 \times 4^{-1})^{-1}$ ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

4. $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಾಗ λದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

5. $4x^2 + 4y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $y^2 = 8x$ ಪರವಲಯಕ್ಕೆ $x + y + 2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆ ಸ್ಪರ್ಶವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\sec^{-1}(-2)$ ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

8. $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$ ನ್ನು $x+iy$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

9. $y = a^{4\log a^x}$ ಅನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ.

10. $\int \dfrac{x^2-1}{x^2+1}dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – B

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $10 \times 2 = 20$

11. $a|b$ ಮತ್ತು $a|c$ ಆದಾಗ $a|b+c$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $3x+2y=8$
$4x-3y=5$ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರೇಮರ್ ನಿಯಮವಾದ ಪ್ರಕಾರ ಬಿಡಿಸಿ.

13. ಸಂಕಲನದ ಮಾಡ್ಯುಲೊ 6ರ ಪ್ರಕಾರ $G=\{0,1,2,3,4,5\}$ ಒಂದು ಸಮುದಾಯವಾಗಿದ್ದು $H=\{0,3\}$ ಯು ಕೊಟ್ಟ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ Gನ ಉಪಸಮುದಾಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ , ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $2x^2+2y^2-18x+6y-7=0$ ಮತ್ತು $3x^2+3y^2+4x+ky+3=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದ್ದರೆ, k ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉಪಪ್ರಧಾನ ಅಕ್ಷವು ಅದರ ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸಮ ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಬಿಡಿಸಿ: $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

18. $\left(\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \dfrac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $y = x^{\cos^{-1}x}$ ನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ.

20. $y=\sin x(1+\cos x)$ ಇದರ ಬೆಲೆಯು $x=\dfrac{\pi}{3}$ ಆದಾಗ, ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} = k\frac{d^2y}{dx^2}$ ನ ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಮೂರು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $3 \times 5 = 15$

23. (a) 432ರ ಒಟ್ಟು ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

(b) $71 \times 73 \times 75$ನ್ನು 23ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು? 2

24. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

25. Q^+ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಮೇಯಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, $(Q^+, *)$ ಒಂದು ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಮುದಾಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. * ಕ್ರಿಯೆಯು $a*b = \frac{2ab}{3}$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ. 5

26. (a) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಏಕಮಾನ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

(b) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ಗಳು $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ನ ದಿಶಾ ಕೋಸೈನ್ ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $2 \times 5 = 10$

27. a) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $x + y = 6$ ಮತ್ತು $x + 2y = 4$ ಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿದ್ದು

ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಏಕಮಾನಗಳಾದಾಗ ಆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ನಿಯತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $9x^2 - 4y^2 = 36$ ಅತಿಪರವಲಯದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ (Asymptotes) ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\tan 3x \tan 2x = 1$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಮೂರು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $3 \times 5 = 15$

30. a) xನ್ನು ಕುರಿತು $\sin^2 x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ 3

b) $y = x^{x^{x \ldots \infty}}$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. a) $y = (\sin^{-1} x)^2$ ಆದಾಗ,

$(1 + x^2) y_2 + x y_1 - 2 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $x = a(\theta + \sin\theta)$ ಮತ್ತು $y = a(1 - \cos\theta)$ ಆದಾಗ,

$\frac{dy}{dx} = \tan\frac{\theta}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

32. a) $2y = x^3 + 5x$ ಮತ್ತು $y = x^2 + 2x + 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ (1, 3)ರಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\int e^x \left(\frac{1+x}{(2+x)^2} \right) dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$ 3

b) $\int 4^{x^3} \cdot x^2 dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. $x^2 = y$ ಮತ್ತು $y = x + 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಂದ ಅವೃತ್ತವಾಗಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ – D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಎರಡು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $2 \times 10 = 20$

35. a) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) ಕ್ಯಾಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಅದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ. 4

36. a) $-1 + i\sqrt{3}$ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚತುರ್ಘಾತ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಅರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. 6

b) $\left[\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \right] = \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \right]^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

37. a) ಮೇಲ್ಮುಖ ಪಾದದ 12 ಸೆಂ. ಮೀ. ಆಳ ಮತ್ತು 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಇರುವ ಶಂಕು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು $1\frac{1}{2}$ ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ./ಸೆಕಂಡ್ ನಂತೆ ಸುರಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ವರೆಗೆ ಪಾತ್ರೆ ತುಂಬಿದಾಗ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ ಮತ್ತು ನೀರಿನ ಸಮತಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta = 1$ ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. a) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$(y^2 + y)dx + (x^2 + x)dy = 0$ 4

Code No. 35-NS

ಹೊಸಪಠ್ಯಕ್ರಮ (೨೦೦೫–೨೦೦೬ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ)

Total No. of Questions: 38] [Total No. of Printed Pages: 16

July, 2006

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

(New Syllabus)

Time: 3 Hours] [Max. Marks: 90

(Kannada Version)

ಸೂಚನೆ:
i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C** ಮತ್ತು **D** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

ii) ವಿಭಾಗ-**A**ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ-**B**ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ-**C**ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ-**D**ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ – A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ **ಹತ್ತು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $10 \times 1 = 10$

1. 3^{12} ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕ ಸ್ಥಾನ (ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನ)ದ ಅಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 3x-5 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = A'$ ಆದಾಗ, xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. Z ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ * ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯು $a * b = a + b + 5$ ಆದಾಗ, ಅದರ ಏಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ ಈ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣದ ದಿಶಾ ಕೊಸೈನ್‌ಗಳನ್ನು [Direction cosines] ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^2 + y^2 + 4x - 7 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $y^2 = 8kx$ ಎಂಬ ಪರವಲಯದಲ್ಲಿ ಲಂಬ ನಾಭಿಯ ಉದ್ದ 4 ಆದರೆ, kಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ದ ಕೋನಾಂಕವನ್ನು [Amplitude] ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $y = x^5 \cdot 5^x$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $\int_0^1 (3x-1)^3 dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – B

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $10 \times 2 = 20$

11. $(c.a)=1$ ಮತ್ತು $c|ab$ ಆದಾಗ, $c|b$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $5x+3y=1$
$3x+5y=-9$ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರೇಮರ್ ನಿಯಮದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

13. $(G.*)$ ಸಮುದಾಯದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,
$(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}.\ \forall a.b\in G$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. $\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k}$. $3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ಮತ್ತು $2\hat{i}+3\hat{k}$ ಎಂಬ ಸದಿಶಗಳು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಘನಾಕೃತಿಯ ಏಕ ಬಿಂದು ಸಂಪಾತ ಬಾಹುಗಳು ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. (6, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $5x+12y-3=0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$ ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ "ನಾಭಿ ಲಂಬ"ದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ, $x+y+xy=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. ω ಎಂಬುದು 1ರ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಘನಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ,
$(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5=32$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{1+x^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $y^2=4ax$ ಪರವಲಯದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಭುಜದ (Abscissa) ಎರಡರಷ್ಟು ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 16. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಕನಿಷ್ಠವಾದಾಗ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $\int \sin\sqrt{x}dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಮೂರು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $3 \times 5 = 15$

23. 252 ಮತ್ತು 595ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. (G.C.D)ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು $252a + 595b$ (a ಮತ್ತು b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ ಹಾಗೂ ಈ ನಿರೂಪಣೆ ಏಕಮೇವವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 5

24. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, Aದ ಸಂಗತಕೋಶ $(AdjA)$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ 3

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $A^2 - 4A + 3I = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

25. $G = \{\cos\theta + i\sin\theta | \theta$ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ $\}$ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಮುದಾಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. (a) $[\vec{a} + \vec{b} \;\; \vec{b} + \vec{c} \;\; \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \;\; \vec{b} \;\; \vec{c}]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

(b) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಸೈನ್ [sine] ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಎರಡು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $2 \times 5 = 10$

27. a) (x_1, y_1) ಹೊರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $2x^2 + 2y^2 - 6x + y + \lambda = 0$ ಗಳು ಲಂಬ ಛೇದಕ (Orthogonal)

ವೃತ್ತಗಳಾದರೆ λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) ಸರಳರೇಖೆ $y = mx + c$ ಯು $y^2 = 4ax$ ಪರವಲಯಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶವಾಗಲು ಬೇಕಾಗುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಚಾಲಕಗಳ (Directrices) ನಡುವಿನ ಅಂತರ $= 10\sqrt{2}$ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ ಆದರೆ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$\sin^{-1} x - \cos^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 2)$. 3

b) $\tan^2 x - 4\sec x + 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ **ಮೂರು** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $3 \times 5 = 15$

30. a) xನ್ನು ಕುರಿತು e^{ax} ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\sinh^{-1} x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sqrt{1 + x^2}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. a) $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ಆದರೆ

$x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $x^2 + y^2 = 2a^2$ ಮತ್ತು $xy = a^2$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು (a, a) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

32. a) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಒಂದು ವಸ್ತುವು S ದೂರವನ್ನು t ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ $S = 5\cos 2t$ ಸೂತ್ರದಂತೆ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು S ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) $e^x + e^y = e^{x+y}$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. ದೀರ್ಘವೃತ್ತ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅನುಕಲನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ – D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ: $2 \times 10 = 20$

35. a) ಅತಿಪರವಲಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ ಮತ್ತು ಅತಿಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & bc \\ 1 & b^2 & ca \\ 1 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-b)(a+b+c)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

36. a) ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಘಾತಂಕಗಳಿಗೆ ಡಿ ಮೊಯಿವೆರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ದಿಶಗಳ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಏಕದಿಶವನ್ನು (Unit vector) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

37. a) ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಳವುಳ್ಳ ಲಂಬ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದರ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದು, ಅದಕ್ಕೆ ನೀರನ್ನು $1\frac{1}{2}$ ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್ ದರದಲ್ಲಿ ಸುರಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಾಗ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ ಮತ್ತು ನೀರಿನ ಸಮತಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\sqrt{2}\operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. a) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 6

b) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 6xe^{x-y}$$ 4

ಅಡ್ಡಸಾಲು	Row	ಆತ್ಮವರ್ತಕ	Reflexive
ಅತಿಪರವಲಯ	Hyperbola	ಆದೇಶಕ್ರಮ	Substitution method
ಅದಲು ಕೋಶ	Transpose matrix	ಆಯತ	Rectangular
ಅದಿಶ	Scalar	ಆಯಾಮ	Dimension
ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ	Scalar product	ಆವೃತ ಗುಣ	Closure property
ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Prime number	ಆಂತರಿಕ	Internal
ಅನನ್ಯತಾಂಶ	Identity element		
ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ	Indefinite integral	ಉತ್ಪನ್ನ	Function
ಅನುಕಲ	Integral	ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ	Integral of a function
ಅನುಕಲನ	Integration	ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನ	Function of function
ಅನುಕಲನದ ಮಿತಿಗಳು	Limits of integration	ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ	Eccentricity
ಅನುಕಲನದ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ	Constant of integration	ಉಪಕೋಶ	Submatrix
ಅನುಕಲೀಯ, ಅನುಕಲ್ಯ	Integrand	ಉಪಗಣ	Subset
ಅನುಚಿತ ಉಪಗಣ	Improper subset	ಉಪಸಂಕುಲ, ಉಪಸಮುದಾಯ	Subgroup
ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷ	Transverse axis	ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ	Subtangent
ಅನುವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	Conjugate numbers	ಉಪಲಂಬರೇಖೆ	Subnormal
ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ	Conjugate axis		
ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕ	Asymptote	ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Imaginary number
ಅಪರಿಮಿತ	infinite		
ಅಪರಿಮೇಯ	Irrational	ಋಣ ಉತ್ಪನ್ನ	Negative function
ಅವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ	Implicit function		
ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ	Abelian group		
ಅರೆಸಂಕುಲ	Semigroup	ಎಡಮಿತಿ	Left hand limit
ಅರ್ಧನಾಭಿಲಂಬ	Semi-latus rectum	ಎರಡನೆಯ ಅವಕಲನಗುಣಾಂಕ	Second differential coefficient
ಅವಲಂಬಿಸಿರುವಂತೆ	With respect to	ಎಲಿಪ್ಸ್	Ellipse
ಅವಕಲನ	Differentiation		
ಅವಕಲ್ಯ	Differentiable	ಏಕ	One, Unity, Identity element
ಅವಕಲ್ಯತೆ	Differentiability	ಏಕ-ಏಕ	One-one
ಅವಕಲನ ಗುಣಾಂಕ	Differential coefficient	ಏಕತಲಸ್ಥ	Coplanar
ಅವಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ	Differential Calculus	ಏಕದ	Identity element
ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ	Differential equation	ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ	Concurrent
ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ	Continuity	ಏಕಮೌಲ್ಯ	Single-valued
ಅಸ್ವೈರಿಕ	Nonsingular	ಏಕಮಾನ ಕೋಶ	Unit matrix
ಅಸ್ತಿತ್ವ	Existence	ಏಕ ಸದಿಶ	Unit vector
ಅಂಗ	Component	ಏಕೈಕ	Unique
ಅಂತರ	Interval, difference		
ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸು	Inscribe	ಐಕ್ಯಧಾತು	Identity element
ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ	If and only if (iff)	ಒಳಗಣ	Into

ಓಟ	Slope
ಕನಿಷ್ಠ	Minimum
ಕೋನಾಂಕ	Amplitude
ಕೋಶ	Matrix
ಕಂಬಸಾಲು	Column
ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ	Ordered pair
ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Permutation
ಕ್ಷಿತಿಜ	Horizon
ಕ್ಷೀಣಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ	Decreasing function
ಕ್ಷೇತ್ರ	Field, Area
ಗಣಾಂಶ, ಅಂಶ	Element of a set
ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ	Multiplicative inverse
ಘಟಕ	Component
ಘಾತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ	Exponential function
ಚರ	Variable
ಚಾಲಕ	Directrix
ಛೇದನ	Intersection
ಜ್ಯಾ	Chord
ತೆರದ ಅಂತರ	Open interval
ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ	Trapezium
ದರ ಮಾಪಕ	Rate measure
ದರ್ಜೆ	Order
ದಿಶಾಕ್ಷ	Directrix
ದೀರ್ಘವೃತ್ತ	Ellipse
ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ	Major axis
ದ್ವಿಮಾನ (ಪರಿ)ಕ್ರಿಯೆ	Binary operation
ಧನಬೆಲೆ	Positive value
ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ	Modulus
ಧ್ರುವೀಯ	Polar
ನಕಾರ	Negation
ನಾಭಿ	Focus
ನಾಭಿ(ಜ)ಲಂಬ	Latus rectum
ನಾಭಿಜ್ಯಾ	Focal chord
ನಿಬಂಧನೆ	Condition
ನಿರಸನ	Cancellation
ನಿರೂಪಿಸು	Define
ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ	Particular integral, definite integral
ನಿರ್ದೇಶಕ	Coordinate
ನಿರ್ಧಾರಕ	Determinant, Directrix
ನಿರ್ಬಂಧ	Condition
ನಿಷ್ಪನ್ನ, ನಿಷ್ಪತ್ತಿ	Derivative
ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯ	Derivable
ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ	Differentiate
ಪರವಲಯ	Parabola
ಪರಿಕರ್ಮ	Operation
ಪರಿಮಾಣ	Magnitude, order
ಪರಿಮಿತ	Finite
ಪರಿಮೇಯ	Rational
ಪರಿವರ್ತನೀಯ	Commutative, abelian
ಪರಿಹಾರ	Solution
ಪಾರ	Amplitude
ಪೂರಕ	Complement
ಪೂರೈಕೆ	Satisfaction
ಪ್ರತಿಫಲನ	Reflexivity
ಪ್ರತಿಲೋಮ (ತರ್ಕದಲ್ಲಿ)	Inverse (in logic)
ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶ	Inverse value
ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ	Principal value
ಪ್ರಮಾಣ, ಮಟ್ಟ	Degree
ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ	Parametric function
ಬಲಮಿತಿ	Right hand limit
ಬಲತಿರುವು ವ್ಯವಸ್ಥೆ	Right handed system
ಬಹುಘಾತಪದಿ	Polynomial
ಬಾಗು	Inclination
ಬಾಹ್ಯ	External
ಬೀಜಗಣಿತದ ಉತ್ಪನ್ನ	Algebraic function
ಬಿಂಬ	Image
ಬಿಂಬಗಣ, ವ್ಯಾಪ್ತಿ	Range
ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ	Odd function
ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ	Integration by parts
ಭಾಜಕ	Divisor, Factor
ಮಾತೃಕೆ	Matrix

ಮಿತಿ	Limit
ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ	Complex number
ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ	Closed interval
ಮೂಲಬಿಂದು	Origin
ಮೂಲಮಾನ	Unit
ಮೂಲಾಕ್ಷ	Radical axis
ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ	Radical centre
ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನ	Differentiation from first principles
ಮೇರೆ	Bound
ಮೇಲಣ	Onto
ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ	Binary operation
ಯುಗ್ಮ	Couple
ಯುಗ್ಮಿತ	Conjugate
ರೇಖೀಯ	Linear
ಲಾಕ್ಷಣಿಕ	Characeteristic, eigen
ಲಘುಕ	Minor
ಲಂಬ	Normal, Perpendicular
ಲಂಬಛೇದಿ ವೃತ್ತಗಳು	Orthogonal circles
ಲಂಬಛೇದಕ	Orthogonal
ಲಂಬ ಅಕ್ಷ ಅತಿಪರವಲಯ	Rectangular hyperboia
ವಕ್ರತೆ	Curvature
ವಲಯ	Ring
ವಾಹಕ	Transitive
ವಿಕಸನ	Expansion
ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ	Discontinuity
ವಿಭಾಜಕ	Divisor, Factor
ವಿಲೋಪನ	Elimination
ವಿಲೋಪಿಸು	Eliminate
ವಿಲೋಮ (ತರ್ಕದಲ್ಲಿ)	Converse (in logic)
ವಿಲೋಮ ಧಾತು	Inverse element
ವಿಶ್ಲೇಷಕವಾಗಿ	Analytically
ವೃದ್ಧಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ	Increasing function
ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ	Acceleration
ವ್ಯತಿಚಕ	Singular
ವ್ಯತಿಚಕವಲ್ಲದ	Nonsingular
ವ್ಯಾಕೋಚನ	Expansion
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ	Definition
ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಅಂತರ	Interval of the range

ಶೂನ್ಯ	Zero
ಶೂನ್ಯಗಣ	Empty set
ಶೂನ್ಯಭಾಜಕ	Zero divisor
ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶ	Null vector
ಶೋಧಕ	Discriminate
ಶೃಂಗ	Vertex
ಶ್ರೇಣಿ, ಶ್ರೇಢಿ	Sequence
ಶಂಕು	Cone
ಶಂಕುಛೇದ, ಶಂಕುಜ	Conic sections
ಶಂಕುಜಗಳು	Conics
ಷರತ್ತು	Condition
ಷಡ್ಭುಜ	Heaxagon
ಸದಿಶ	Vector
ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ	Even function
ಸಮಶಕ್ತಿಯುಳ್ಳ	Equivalent
ಸಮಾಂಗತೆ, ಸಮಮಿತ	Symmetric
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	Parallelogram
ಸಮಾಂತರಫಲಕಘನ	Parallelepiped
ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ	Equivalence relation
ಸಮುದಾಯ	Group
ಸರಳ ಸಂಗತ ಚಲನೆ	Simple harmonic motion
ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ	Codomain
ಸಹಗುಣಕ	Coefficinet, cofactor
ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ	Coaxial, coaxal
ಸಹವರ್ತನೀಯ	Associative
ಸಹವರ್ತಿ	Conjugate
ಸಾಲು	Row
ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಕಲ	General integral
ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸು	Generalize
ಸಾಂಖ್ಯಿಕ	Numerical
ಸಾಂತ	Finite
ಸುಲಭ ಉತ್ಪನ್ನ	Elementary function
ಸ್ಥಾನಸದಿಶ	Position vector
ಸ್ವತುಲ್ಯ	Reflexive
ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ	Complex number
ಸಂಕುಲ	Group
ಸಂಗತ ಕೋಷ್ಟಕ	Adjoint matrix
ಸಂಯೋಗ	Union
ಸಂಯೋಜನೆ	Associate
ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ	Minor axis

ಇಂಗ್ಲಿಷ್–ಕನ್ನಡ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಕೋಶ

Abelian group	ಆಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ/ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ
Acceleration	ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ
Adjoint matrix	ಸಂಗತಕೋಶ
Algebraic	ಬೈಜಿಕ
Algebraic function	ಬೈಜಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ
Amplitude	ಕೋನಾಂಕ
Analytically	ವಿಶ್ಲೇಷಕವಂತೆ
Argument	ಕೋನಾಂಕ
Associate	ಸಂಯೋಜನೆ
Associative	ಸಹವರ್ತನೀಯ
Asymptote	ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕ
Binary operation	ಯುಗಳ (ದ್ವಿಮಾನ) ಸಂಕ್ರಿಯೆ
Bound	ಮೇರೆ
Cancellation	ನಿರಸನ
Characteristic	ಲಾಕ್ಷಣಿಕ
Chord	ಜ್ಯಾ
Closed interval	ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ
Closure property	ಆವೃತ ಗುಣ
Coaxial, coaxal	ಸಹ ಮೂಲಾಕ್ಷ
Codomain	ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ
Coefficient	ಸಹಗುಣಕ
Cofactor	ಸಹಗುಣಕ
Column	ಕಂಬಸಾಲು
Commutative	ಪರಿವರ್ತನೀಯ
Complement	ಪೂರಕ
Complex number	[illegible], ... ಸಂಖ್ಯೆ
Component	ಅಂಗ (ಘಟಕ)
Concurrent	ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ
Condition	ನಿಬಂಧನೆ, ನಿರ್ಬಂಧ
Cone	ಶಂಕು
Conic	ಶಂಕುಜಗಳು
Conjugate	ಸಹವರ್ತಿ, ಯುಗ್ಮಿತ, ಅನುವರ್ತ
Conjugate axis	ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ
Constant of integration	ಅನುಕಲನದ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ
Continuity	ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ
Converse (in logic)	ವಿಲೋಮ(ತರ್ಕದಲ್ಲಿ)
Coordinate	ನಿರ್ದೇಶಕ
Coplanar	ಏಕತಲಸ್ಥ
Curvature	ವಕ್ರತೆ
Decreasing function	ಕ್ಷೀಣಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ
Definite	ನಿರ್ದಿಷ್ಟ
Definite integral	ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ
Definition	ವ್ಯಾಖ್ಯೆ
Degree	ಪ್ರಮಾಣ, ಮಟ್ಟ
Derivable	ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯ, ಅವಕಲ್ಯ
Derivative	ನಿಷ್ಪನ್ನ, ನಿಷ್ಪತ್ತಿ
Determinant	ನಿರ್ಧಾರಕ
Difference	ಅಂತರ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ
Differentiability	ಅವಕಲ್ಯತೆ
Differentiable	ಅವಕಲ್ಯ
Differential Calculus	ಅವಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ
Differential coefficient	ಅವಕಲನದ ಸಹಾಂಕ, ನಿಷ್ಪನ್ನ, ಕಲನಾಂಕ
Differential equation	ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ
Differentiate	ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸು
Differentiation from first principles	ಮೂಲತತ್ತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನ
Dimension	ಆಯಾಮ
Directrix	ನಿಶಾಕ್ಷ, ಚಾಲಕ, ನಿರ್ಧಾರಕ
Discontinuity	ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ
Divisor	ಭಾಜಕ, ವಿಭಾಜಕ
Discriminate	ಶೋಧಕ
Eccentricity	[illegible]
Eigen	ಲಾಕ್ಷಣಿಕ
Element of a set	ಗಣಾಂಶ, ಅಂಶ
Elementary function	ಸುಲಭ ಉತ್ಪನ್ನ
Eliminate	ವಿಲೋಪಿಸು
Elimination	ವಿಲೋಪನ
Ellipse	ದೀರ್ಘವೃತ್ತ
Empty set	ಶೂನ್ಯಗಣ
Equivalence relation	[illegible]
Equivalent	ಸಮಸಂಯೋಗಿ

Even function	ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ
Existence	ಲಭ್ಯ, ಅಸ್ತಿತ್ವ
Expansion	ವಿಕಸನ, ವ್ಯಾಕೋಚ ವಿಸ್ತರಣ
Exponential function	ಘಾತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ
External	ಬಾಹ್ಯ
Factor	ಭಾಜಕ, ವಿಭಾಜಕ
Field	ಕ್ಷೇತ್ರ
Finite	ಪರಿಮಿತಿ, ಸಾಂತ
Flow	ಅಪ್ರಸಾಲು, ಸಾಲು
Focal chord	ನಾಭಿಜ್ಯಾ
Focus	ನಾಭಿ
Force	ಬಲ
Function	ಉತ್ಪನ್ನ
Function of function	ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನ
General integral	ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಕಲ
Generalize	ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸು
Group	ಸಂಕುಲ, ಸಮುದಾಯ
Hexagon	ಷಡ್ಭುಜ
Horizon	ಕ್ಷಿತಿಜ
Hyperbola	ಅತಿಪರವಲಯ
Hyperbolic function	ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ
Identity element	ಏಕದ, ಅನನ್ಯತಾಂಶ, ಐಕ್ಯಧಾತು
If and only if (iff)	ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ
Image	ಬಿಂಬ, ಛಾಯೆ
Imaginary number	ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆ
Implicit function	ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನ
Improper subset	ಅನುಚಿತ ಉಪಗಣ
Inclination	ಬಾಗು
Increasing function	ವೃದ್ಧಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ
Indefinite integral	ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ
Infinite	ಅಪರಿಮಿತ, ಅನಂತ
Inscribe	ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸು
Integral	ಅನುಕಲ
Integral of a function	ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ
Integrand	ಅನುಕಲೀಯ, ಅನುಕಲ್ಯ
Integration	ಅನುಕಲನ
Integration by parts	ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ
Internal	ಆಂತರಿಕ
Intersection	ಛೇದನ

Interval of the range	ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಅಂತರ
Interval, difference	ಅಂತರ
Into	ಒಳಗಣ
Inverse (in logic)	ಪ್ರತಿಲೋಮ (ತರ್ಕದಲ್ಲಿ)
Inverse element	ವಿಲೋಮ ಧಾತು (ಅಂಶ)
Inverse value	ಪ್ರತಿಲೋಮ ಬೆಲೆ
Latus rectum	ನಾಭಿ(ಲ)ಲಂಬ
Irrational	ಅಪರಿಮೇಯ
Left hand limit	ಎಡಮಿತಿ
Limit	ಮಿತಿ
Limits of integration	ಅನುಕಲನದ ಮಿತಿಗಳು
Linear	ರೇಖೀಯ
Magnitude, order	ಪರಿಮಾಣ
Major axis	ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ, ಪ್ರಧಾನಾಕ್ಷ
Map	ಚಿತ್ರಣ, ಉತ್ಪನ್ನ
Matrix	ಕೋಶ, ಮಾತೃಕೆ
Minimum	ಕನಿಷ್ಠ
Minor	ಲಾಘವ
Minor axis	ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ
Modulus	ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ
Multiplicative inverse	ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ
Negation	ನಕಾರ
Negative function	ಋಣ ಉತ್ಪನ್ನ
Nonsingular	ಅವೈಶೇಷಿಕ
Nonsingular	ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದ
Normal	ಲಂಬ
Null vector	ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶ
Numerical	ಸಾಂಖ್ಯಿಕ
Odd function	ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ
One, Unity, Identity element	ಏಕ
One-one	ಏಕ–ಏಕ
Onto	ಮೇಲಣ
Open interval	ತೆರೆದ ಅಂತರ
Operation	ಪರಿಕರ್ಮ
Order	ದರ್ಜೆ
Ordered pair	ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ
Origin	ಮೂಲಬಿಂದು
Orthogonal	[illegible]

Orthogonal circles	ಲಂಬವೃತ್ತಗಳು
Parabola	ಪರವಲಯ
Parallelepiped	ಸಮಾಂತರಪರಿಪದಿ
Parallelogram	ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ
Parametric function	ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ
Particular integral	ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ
Permutation	ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
Polar	ಧ್ರುವೀಯ
Polynomial	ಬಹುಘಾತಪದಿ
Position vector	ಸ್ಥಾನಸದಿಶ
Positive value	ಧನಬೆಲೆ
Prime number	ಅ(ವಿ)ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ
Principal value	ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ
Proposition	ಉಕ್ತಿ
Radical axis	ಮೂಲಾಕ್ಷ
Radical centre	ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ
Range	ಬಿಂಬಗಣ, ವ್ಯಾಪ್ತಿ
Rate measure	ದರ ಮಾಪಕ
Rational	ಪರಿಮೇಯ
Rectangular	ಆಯತ
Rectangular hyperbola	ಲಂಬೀಯ (ಆಯತ) ಹೈಪರ್ಬೋಲ
Reflexive	ಆತ್ಮವರ್ತಕ, ಸ್ವತುಲ್ಯ, ಪ್ರತಿಫಲನ
Right hand limit	ಬಲಮಿತಿ
Right handed system	ಬಲತಿರುಪು ವ್ಯವಸ್ಥೆ
Ring	ವಲಯ
Row	ಅಡ್ಡಸಾಲು
Satisfaction	ಪೂರೈಕೆ
Scalar	ಅದಿಶ
Scalar product	ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ
Second differential coefficient	ಎರಡನೆಯ ಅವಕಲಸಹಾಂಕ
Semigroup	ಅರೆಸಂಕುಲ
Semi-latus rectum	ಅರ್ಧನಾಭಿಲಂಬ
Sequence	ಶ್ರೇಣಿ, ಶ್ರೇಢಿ
Simple harmonic motion	ಸರಳ ಸಂಗತ ಚಲನೆ
Single-valued	ಏಕಮೌಲ್ಯ
Singular	ವೈಶೇಷಿಕ
Slope	ಓಟ
Solution	ಪರಿಹಾರ
Subgroup	ಉಪಸಂಕುಲ, ಉಪಸಮುದಾಯ
Submatrix	ಉಪಕೋಶ
Subnormal	ಉಪಲಂಬರೇಖೆ
Subset	ಉಪಗಣ
Substitution method	ಆದೇಶಕ್ರಮ
Subtangent	ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ
Symmetric, symmetry	ಸಮಾಂಗತೆ, ಸಮಮಿತಿ
Transitive	ವಾಹಕ
Transpose matrix	ಅದಲು ಕೋಶ
Transverse axis	ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷ
Trapezium	ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ
Union	ಸಂಯೋಗ
Unique	ಏಕೈಕ
Unit	ಮೂಲಮಾನ
Unit matrix	ಏಕಮಾನ ಕೋಶ
Unit vector	ಏಕ ಸದಿಶ
Variable	ಚರ
Variable separable	ಬೇರ್ಪಡಿಸಬಹುದಾದ ಚರಗಳು
Vector	ಸದಿಶ
Vertex	ಶೃಂಗ
With respect to	ಅವಲಂಬಿಸಿರುವಂತೆ
Zero	ಶೂನ್ಯ
Zero divisor	ಶೂನ್ಯಭಾಜಕ

ಪರಾಮರ್ಶನ ಗ್ರಂಥಗಳು

1. *Algebra* by Hall and Knight
2. *Algebra* by Manickavachagam Pillai et al. S. Vishwanath Printers Publishers Pvt. Ltd.
3. *Higher Algebra* S. Barnard and J.M.Child. Macmillan India Ltd.
4. *Coordinate Geometry* by S.L.Loney
5. *Coordinate Geometry* by Shantinarayan
6. *Plane Trigonometry* by S.L.Loney
7. *A Text of Trigonometry* by S.Narayan. S Vishwanath Printers Publishers Pvt. Ltd.
8. *Differential Calculus* by S.Balachandra Rao and C.K.Shantha New Age International (Wiley Eastern Ltd.), New Delhi.
9. *Differential Calculus* by Shanti Narayan. Chand & Co.
10. *Integral Calculus* by Shanti Narayan, Chand & Co.
11. *Differential Equations* by S.Balachandra Rao and H.R.Anuradha, Universities Press, Hyderabad.
12. *ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ*, ಪ್ರಸಾರಾಂಗ, ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ, ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ-583221.

ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳು

1. *Indian Mathematics and Astronomy – Some Landmarks* (Rev 3rd Ed. 2004) by Dr. S.Balachandra Rao, Gandhi Centre of Science and Human Values, Bharatiya Vidya Bhavan, Race Course Road, Bangalore-560 001.
2. *A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics* by Dr. T.S.Bhanu Murthy, Wiley Eastern Ltd. (New Age International), New Delhi, 1992.
3. *History of Ancience Indian Mathematics* by Dr C.N.Srinivasa Iyengar, The World Press Pvt. Ltd., Calcutta, 1967
4. *The World of Mathematics* by James R.Newmann, Pub: Simmons and Schuster, New York
5. *Men of Mathematics* by E.T.Bell, Penguin Books, Middlesex, 1965
6. *History of Hindu Mathematics* (2 parts) by B.B.Datta and A.N.Singh, Reprinted: Bharatiya Kala Prakashan, Delhi, 2001
7. *Applications and History of Trigonometry* (16 pages)
8. *60 Eminent Indian Mathematicians* (With Portraits) – (32 pages)
9. *Eminent Mathematcians of the 19th Century* by Ganesh Prasad

10. ***Remarkable Mathematicians*** (from Euler to Von Neumann) by Ioan James, Cambridge University Press, 2003 (Distributors: Foundation Books, Brigade MM, K.R.Road, Jayanagar, Bangalore-82

Note: Books (7), (8) and (9) above are edited by later Prof J.N.Kapur and published by Mathematical Sciences Trust Society, C-766, New Friends Colony, New Delhi-110065.

11. ***ಆರ್ಯಭಟ*** – ಡಾ|| ಎಸ್.ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್

12. ***ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರವರ್ತಕರು ಮತ್ತು ಸ್ವಾರಸ್ಯಗಳು*** – ಡಾ|| ಎಸ್.ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್

13. ***ಭಾರತೀಯ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ – ಒಂದು ಕಿರುಪರಿಚಯ*** – ಡಾ|| ಎಸ್.ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್

ಸೂಚನೆ: (11), (12), (13) ಪುಸ್ತಕಗಳ ಪ್ರಕಾಶಕರು – ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಮಾನವೀಯ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಗಾಂಧೀ ಕೇಂದ್ರ, ಭಾರತೀಯ ವಿದ್ಯಾಭವನ, ರೇಸ್ ಕೋರ್ಸ್ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು–560001.

14. ***ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಚರಿತ್ರೆ*** – ಡಾ|| ಸಿ.ಎನ್.ಶ್ರೀನಿವಾಸಯ್ಯಂಗಾರ್, ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಮೈಸೂರು, 1958

15. ***ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್*** – (4ನೇ ಮುದ್ರಣ) ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್, ಕನ್ನಡ ಪುಸ್ತಕ ಪ್ರಾಧಿಕಾರ, ಬೆಂಗಳೂರು-2003

16. ***ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ*** – ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್, ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ, ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ, 1995

17. ***ಗಣಿತಜ್ಞರು*** – ಮಲ್ಲಿಕಾರ್ಜುನ ಯಾಳವಾರ, ಕುಂದರಲಿ, ಬಾಗಲಕೋಟೆ, 2003

ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳು

The following books are published by Cambridge University Press (Distributors: Foundation Books, C-22, 'C' Block, Brigade MM, K.R.Road, Jayanagar, Bangalore-560082)

1. ***Mathematics for A and AS Leveles Pure Mathematics*** The School Mathematics Project, (Cambridge Low Price Edition), Cambridge, U.K.,1997
2. ***Mathematical Projects*** by Brian Blot & David Hobbs, Cambrdige, U.K., South Asian Edition, 2001

The following low – priced books are published by MSTS Mathematics Library, C-766, New Friends Colony, New Delhi-110065:

1. 100 problems for workshops of training students and teachers (16 pages)
2. The Concept of Mathematics Laboratory (16 pages)
3. Application of Matrices (16 pages)
4. Preparing charts and models for a Mathematics Exhibition (16 pages)
5. Suggested Experiments for a Mathematical Laboratory, Vol-I & II
6. Sugested Activities for a Mathematics Club (32 pages)
7. Magic Squares (156 pages)
8. Magic Squares (16 pages)
9. Dated Magic Squares (16 pages)

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಪಿ.ಯು.ಸಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

ಸಂಪಾದಕರು ಮತ್ತು ಲೇಖಕರ ವಿಳಾಸ

1. **ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್,** ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ., ಪಿಎಚ್.ಡಿ. ಸಂಪಾದಕರು
(ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರಾಂಶುಪಾಲರು ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು,
ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬಸವನಗುಡಿ, ಬೆಂಗಳೂರು)
ಗೌ|| ನಿರ್ದೇಶಕರು, ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಮಾನವೀಯ ಮೌಲ್ಯಗಳ
ಗಾಂಧೀ ಕೇಂದ್ರ, ಭಾರತೀಯ ವಿದ್ಯಾ ಭವನ,
ರೇಸ್‌ಕೋರ್ಸ್‌ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು–560 001.

2. **ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಂತಿ ಪುರಂದರ್,** ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ.
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಜ್ಯೋತಿ ನಿವಾಸ ಕಾಲೇಜ್,
ಬೆಂಗಳೂರು-560 095.

3. **ಶ್ರೀಮತಿ ಟಿ.ಆರ್.ಚಂದ್ರಕಲಾ,** ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ.
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಎಂ.ಎಲ್.ಎ.ಪದವಿಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜ್,
ಬೆಂಗಳೂರು–560 003.

4. **ಶ್ರೀಮತಿ ಎಚ್.ಬಿ.ಜಯಕುಮಾರಿ,** ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ.
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಅಂಬೇಡ್ಕರ್ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜ್,
ಬೆಂಗಳೂರು–560 086.

5. **ಶ್ರೀಮತಿ ಎಂ.ಟಿ.ಸೋಮಲತಾ,** ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ., ಎಂ.ಫಿಲ್.
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಎಸ್.ಜೆ.ಬಿ. ಇನ್ಸ್‌ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್ ಟೆಕ್ನಾಲಜಿ
ಬೆಂಗಳೂರು–560 060.

ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಕೇಂದ್ರವು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿರುವ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣದ ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯವನ್ನು ತಮ್ಮ ಮುಂದಿಡಲು ನಮಗೆ ಸಂತೋಷವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ ಜಾರಿಗೆ ಬಂದಿರುವ ಹೊಸಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯವನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿರುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ನಾಡಿನ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ವಿದ್ವಾಂಸರು ಪಾಲುದಾರರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಪಠ್ಯವು ನಾಡಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪಠ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಹೃದಯಿಗಳು ಪಠ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಬರೆದು ತಿಳಿಸಿದರೆ ತುಂಬಾ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಆವೃತ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯದ ಗುಣಮಟ್ಟವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬಹುದು.

ನಾವು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿರುವ ಪಠ್ಯಗಳಿಗೆ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯು ಅಧಿಕೃತ ಮನ್ನಣೆ ನೀಡಿ ನಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಕೈ ಜೋಡಿಸಿದೆ. ಕರ್ನಾಟಕದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಬಳಗಕ್ಕೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನವು ಉತ್ತಮ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯಬೇಕೆಂಬುದು ನಮ್ಮ ಮುಖ್ಯ ಗುರಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ತಮ್ಮ ಸಹಕಾರವಿದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ರೂ. ೧೬೦/-